

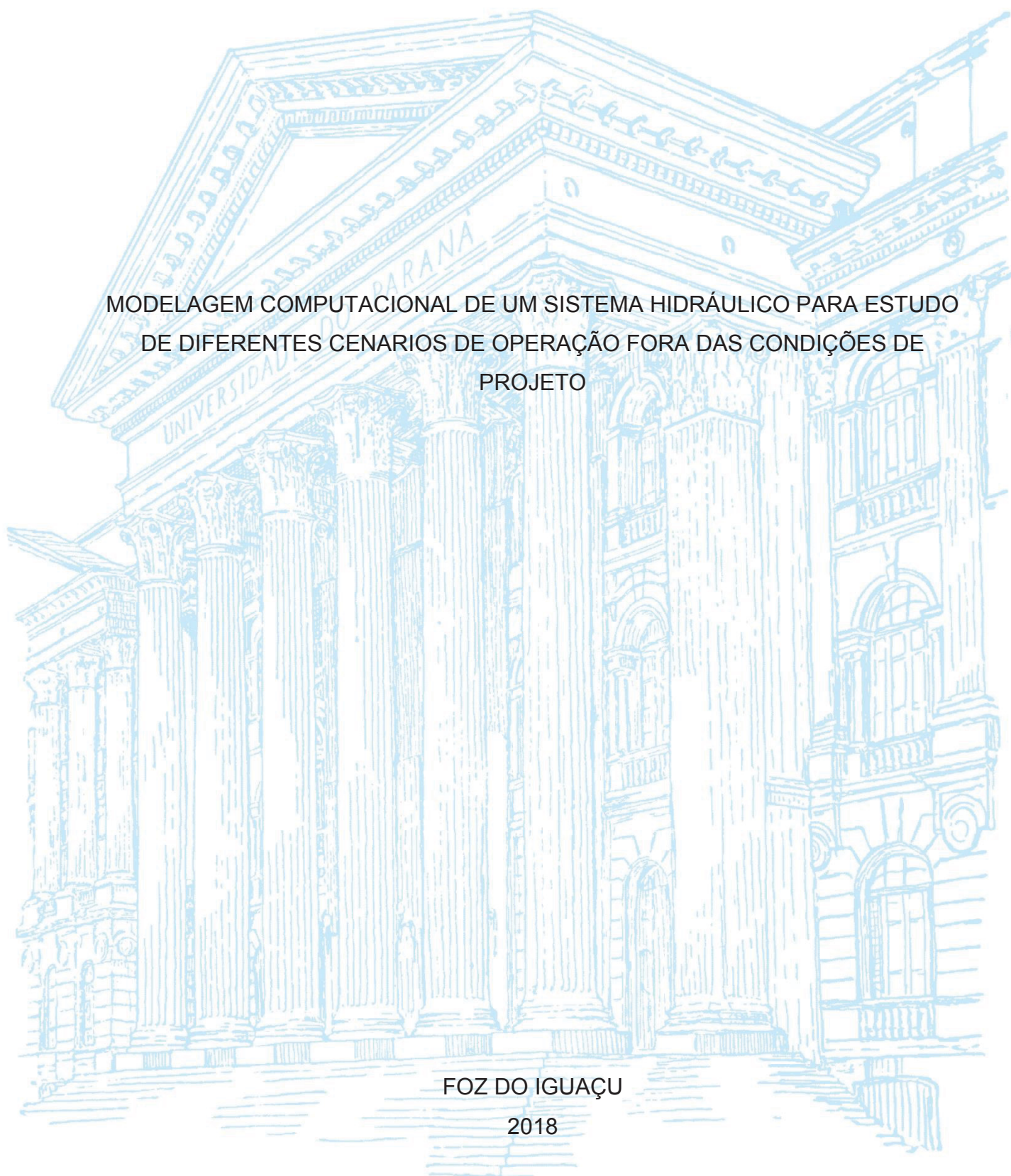
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DIEGO OSMAR GALEANO ESPINOLA

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE UM SISTEMA HIDRÁULICO PARA ESTUDO
DE DIFERENTES CENARIOS DE OPERAÇÃO FORA DAS CONDIÇÕES DE
PROJETO

FOZ DO IGUAÇU

2018



DIEGO OSMAR GALEANO ESPINOLA

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE UM SISTEMA HIDRAULICO PARA ESTUDO
DE DIFERENTES CENARIOS DE OPERAÇÃO FORA DAS CONDIÇÕES DE
PROJETO

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia e o Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Dechechi

FOZ DO IGUAÇU

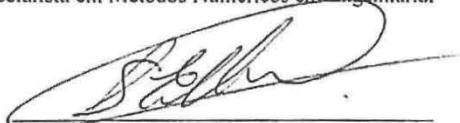
2018

TERMO DE APROVAÇÃO

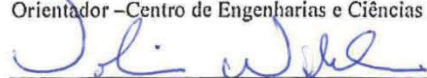
DIEGO OSMAR GALEANO ESPINOLA

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE UM SISTEMA HIDRÁULICO PARA ESTUDO I
DIFERENTES CENARIOS DE OPERAÇÃO FORA DAS CONDIÇÕES DE PROJETO

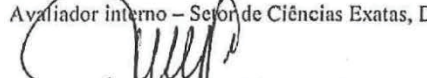
Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia e o Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título Especialista em Métodos Numéricos em Engenharia.



Prof. Dr. Eduardo Cesar Dechechi
Orientador – Centro de Engenharias e Ciências Exatas, UNIOESTE



Prof. Dr. Volmir Eugênio Wilhelm
Avaliador interno – Setor de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, UFPR



Prof. Dr. Luis Evelio Garcia.
Avaliador externo – Instituto Latino Americano de Tecnologia Infraestrutura e Território,
UNILA

Foz do Iguaçu, 15 de Novembro de 2018.

Dedico esse trabalho a minha mãe Ramona Espinola, cuja essência está sempre presente em tudo que faço.

AGRADECIMENTOS

Um agradecimento especial ao meu pai, e aos meus irmãos por sempre terem me apoiado em tudo. Ao meu orientador o professor Eduardo Dechechi, por me motivar e encaminhar nos momentos mais difíceis.

Aos colegas, grandes amigos da pós-graduação, pelo companheirismo, principalmente ao Walter Benitez, ao Christian Wendt e ao Javier Narvaez quem foram grandes exemplos de determinação e sempre estiveram à disposição para colaborar nos estudos e no trabalho final.

Ao CEASB e a Fundação Parque Tecnológico Itaipu pela oportunidade de realizar essa especialização.

O primeiro princípio é que você não deve se enganar, e você é a pessoa mais fácil de enganar. (Richard P. Feynman, 1974.)

RESUMO

Neste trabalho se propõe a modelagem computacional de um sistema hidráulico unidimensional, para estudo do comportamento durante um fenômeno transiente, como o fechamento repentino de uma válvula. As equações governantes são derivadas das equações de conservação de massa e momento, até chegar um sistema de equações diferenciais simplificadas que foi resolvido numericamente pelos métodos *Runge Kutta* explícito de quarta ordem e implícito de terceira ordem. Foram avaliados quatro cenários, um sistema básico sem chaminé de equilíbrio, um cenário com chaminé de equilíbrio, variando a configuração. Outro cenário com os parâmetros de chaminé constantes, e variando a posição e por último variando o tempo de fechamento. Os resultados obtidos permitiram avaliar o modelo, porque as variações nas respostas foram correspondentes ao esperado, quanto maior a capacidade e a proximidade da chaminé com a válvula, aumenta o efeito de amortecimento da oscilação de pressão. E quanto menor o tempo de fechamento foram observados maiores picos de pressão máxima como esperado.

Palavras-chave: Modelagem Computacional. Fluidodinâmica. Palavra-chave. Runge Kutta. Fenômeno transiente.

ABSTRACT

In this work, it is proposed the computational modeling of a one-dimensional hydraulic system, to study the behavior during a transient phenomenon, such as the sudden closure of a valve. The governing equations are derived from the equations of mass and momentum conservation, obtaining a simplified differential equation system, which was solved numerically by Runge Kutta explicit fourth order, and implicit third order. Four scenarios were evaluated, a basic system without surge tank, a scenario with surge tank, varying the configuration. Another scenario with constant surge tank with different positions and lastly changing the closing time. The results allowed to evaluate the model, the variations in responses corresponded to what was found in the literature, the greater the capacity and the proximity of the surge tank with the valve, the damping effect of the pressure oscillation increases. And the lower the closure time the higher peak pressure peaks were observed as expected.

Keywords: Computational modeling. Fluid dynamics. Runge Kutta Methods. Transient Phenomena.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Fotos de acidente em Central Hidrelétrica	17
FIGURA 2: Tensões em um cubo infinitesimal de fluido	21
FIGURA 3: Esquema de sistema hidráulico com paredes elásticas.....	26
FIGURA 4: Comportamento do sistema na Etapa 1.....	27
FIGURA 5: Comportamento do sistema na Etapa 2.....	28
FIGURA 6: Comportamento do sistema na Etapa 3.....	28
FIGURA 7: Comportamento do sistema na Etapa 4.....	29
FIGURA 8: Oscilação de pressão sem atrito.....	29
FIGURA 9: Oscilação de pressão considerando perdas por atrito	30
FIGURA 10: Volume de controle de largura dx	31
FIGURA 11: Área transversal de tubo elástico com variação de pressão	32
FIGURA 12: Volume de controle para equação do momento	34
FIGURA 13: Circuito elétrico equivalente do elemento do sistema hidráulico.....	39
FIGURA 14: Discretização espacial de uma tubulação de longitude	39
FIGURA 15: Circuito elétrico equivalente a uma tubulação elástica ou rígida do sistema hidráulico	40
FIGURA 16: Discretização espacial de uma tubulação de longitude L	41
FIGURA 17: Diagrama equivalente elétrico de uma válvula	42
FIGURA 18: Diagrama do tanque de compensação	43
FIGURA 19: Circuito elétrico equivalente ao tanque de compensação.....	44
FIGURA 20: Cenário sem chaminé de equilíbrio.....	53
FIGURA 21: Lei de fechamento da válvula	54
FIGURA 22: Oscilação de pressão e vazão durante causado pelo fechamento da válvula, no cenário I.	55
FIGURA 23: Metodo Runge Kutta Implícito no cenário I.	55
FIGURA 24: Oscilação de pressão e vazão durante causado pelo fechamento da válvula, no cenário I.	56
FIGURA 25: Oscilação de pressão na válvula durante o fechamento da válvula, no cenário I.	56
FIGURA 26: Frequências principais no cenário I.	57
FIGURA 26: Diagrama do cenário II.....	57
FIGURA 27: Cenário II. Com área de chaminé $16,96\text{m}^2$ vezes a areado tubo.....	58
FIGURA 28: Frequências naturais para o caso de Chaminé com 19.96 m^2	59

FIGURA 29:.. Cenário II. Com área de chaminé 1696m^2 vezes a areado tubo.....	59
FIGURA 31:.. Frequências principais do Cenário II.....	60
FIGURA 32:.. Oscilação de pressão e Frequências próximo ao tanque $L=0$	61
FIGURA 33:.. Oscilação de pressão e Frequências próximo ao tanque $L/5$	62
FIGURA 34:.. Oscilação de pressão e Frequências próximo ao tanque $2L/5$	62
FIGURA 35:.. Oscilação de pressão e Frequências próximo ao tanque $3L/5$	63
FIGURA 36:.. Oscilação de pressão e Frequências próximo ao tanque $4L/5$	63
FIGURA 37:.. Cenário IV. Fechamento da Válvula em 3s.....	64
FIGURA 38:.. Cenário IV. Fechamento da Válvula em 2s.....	65
FIGURA 39:.. Cenário IV. Fechamento da Válvula em a1.5s.....	65

LISTA DE TABELAS

TABELA 1: TABELA DE BUTCHER.....	46
TABELA 2: FORMA MATRICIAL DA TABELA DE BUTCHER.....	46
TABELA 3: TABELA METODO DE HEUN	47
TABELA 4: COEFICIENTES DO RK4.....	49
TABELA 5: Coeficientes Lobatto IIIA segunda ordem.....	51
TABELA 6: Lobatto IIIA terceira ordem	52
TABELA 7: Coeficientes Lobatto IIIB segunda ordem.....	52
TABELA 8: Lobatto IIIB terceira ordem	52
TABELA 9: Coeficientes Lobatto IIIC segunda ordem.....	52
TABELA 10: Lobatto IIIC terceira ordem	52
TABELA 11: Radau IA terceira ordem.....	52
TABELA 12: Parâmetros correspondentes ao cenário I.....	60

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área transversal	$[m^2]$
a	Velocidade do som	$[m/s]$
C	Capacitância hidroacústica	$[m^2]$
C_c	Compressibilidade do vórtice	$[-]$
C_d	Coeficiente de descarga	$[-]$
C_{ST}	Capacitância hidroacústico do duto de ventilação	$[m^2]$
C'	Capacitância hidroacústica linear	$[m]$
C'_e	Capacitância elétrica linear	$[F/m]$
D	Diâmetro	$[m]$
$D_{cond_{entr}}$	Diâmetro da entrada do conduto forçado	$[m]$
$D_{cond_{sai}}$	Diâmetro da saída do conduto forçado	$[m]$
$D_{esp_{entr}}$	Diâmetro da entrada da caixa espiral	$[m]$
$D_{esp_{sai}}$	Diâmetro da saída da caixa espiral	$[m]$
$D_{suc_{entr}}$	Diâmetro da entrada do tubo de sucção	$[m]$
$D_{suc_{sai}}$	Diâmetro da saída do tubo de sucção	$[m]$
$D_{tom_{entr}}$	Diâmetro da entrada da tomada d'água	$[m]$
$D_{tom_{sai}}$	Diâmetro da saída da tomada d'água	$[m]$
E_{still}	Módulo de elasticidade da tubulação	$[Pa]$
E_{water}	Módulo de compressibilidade da água	$[Pa]$
E	Energia específica	$[J/kg]$
e	Espessura da parede	$[m]$
F	Força	$[N]$
f	Frequência de excitação	$[Hz]$
f_o	Frequência natural	$[Hz]$
g	Gravidade	$[m/s^2]$
H	Altura piezométrica	$[mca]$
h	Pressão	$[mca]$
dt	Passo de tempo	$[s]$

h	Queda adimensional	$[-]$
i	Corrente elétrica	$[A]$
J	Momento polar de inércia	$[kg/m^4]$
K	Módulo de compressibilidade da água	$[Pa]$
K_1	Inclinação no início do intervalo de integração	$[-]$
K_2, K_3	Inclinação no ponto médio do intervalo de integração	$[-]$
K_4	Inclinação no fim do intervalo de inclinação	$[-]$
L	Comprimento	$[m]$
l_{cond}	Comprimento do conduto forçado	$[m]$
l_{esp}	Comprimento da caixa espiral	$[m]$
l_{suc}	Comprimento do tubo de sucção	$[m]$
l_{tom}	Comprimento da tomada d'água	$[m]$
L'	Indutância hidroacústica linear	$[s^2/m^3]$
L'_e	Indutância elétrica linear	$[H/m]$
\dot{M}	Vazão mássica	$[kg/s]$
N	Velocidade de rotação	$[RPM]$
P	Potência	$[W]$
p	Pressão	$[Pa]$
Q	Vazão volumétrica	$[m^3/s]$
R	Raio	$[m]$
R_v	Resistência da válvula	$[s/m^2]$
R'	Resistência hidroacústica linear	$[s/m^3]$
R'_e	Resistência elétrica linear	$[\Omega/m]$
T	Torque	$[N \cdot m]$
T'	Período	$[s]$
t	Tempo	$[s]$
U	Potencial elétrico	$[W]$
V	Velocidade	$[m/s]$

V_{vap}	Volume do vórtice	$[m^3]$
v	Vazão adimensional	$[-]$
x	Posição	$[m]$
W_H	Queda líquida polar	$[-]$
W_T	Torque líquido polar	$[-]$
z	Cota	$[m]$
α	<i>Velocidade de rotação adimensional</i>	$[-]$
α	<i>Ângulo de inclinação</i>	$[rad]$
β	<i>Torque adimensional</i>	$[-]$
ρ	<i>Densidade</i>	$[kg/m^3]$
η	<i>Eficiência</i>	$[-]$
ω	<i>Velocidade angular</i>	$[rad/s]$
κ	<i>Fator de ganho de fluxo mássico</i>	$[-]$
ε	<i>Deformação</i>	$[-]$
δ	<i>Tensão</i>	$[Pa]$
ν	<i>Coeficiente de Poisson</i>	$[-]$
τ	<i>Tensão de cisalhamento</i>	$[Pa]$
λ	<i>Fator de atrito</i>	$[-]$
μ	<i>Viscosidade</i>	$[Pa \cdot s]$
$[A]$	<i>Matriz de inércia e compressibilidade</i>	
$[B]$	<i>Matriz de amortecimento</i>	
$[C]$	<i>Vetor das condições de contorno</i>	
$[X]$	<i>Vetor de estado</i>	

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 JUSTIFICATIVA	17
1.2 OBJETIVOS	18
1.2.1 Objetivo geral	Error! Bookmark not defined.
1.2.2 Objetivos específicos.....	18
1.3 METODOLOGIA.....	19
2 REVISÃO DE LITERATURA	20
2.1 MECÂNICA DOS FLUIDOS	20
2.1.1 Fluido:.....	20
2.1.2 Campo de velocidade:.....	21
2.1.3 Campos de tensão	21
2.1.4 Pressão:	22
2.1.5 Densidade ou massa específica:.....	22
2.1.6 Viscosidade:	22
2.1.7 Regimes de escoamento:.....	22
2.1.8 Número de Reynolds:.....	23
2.1.9 Fator de atrito	23
2.2 FENOMENOS DE TRANSIENTES HIDRAULICOS	24
2.2.1 Propagação de ondas de pressão.....	26
2.2.2 Etapa 2: $L/a < t \leq 2L/a$	27
2.2.3 Etapa 3: $2L/a < t \leq 3L/a$	28
2.2.4 Etapa 4: $3L/a < t \leq 4L/a$	28
2.3 MODELAGEM MATEMATICA DO ESCOAMENTO	30
2.3.1 Equação da continuidade:	30
2.3.2 Equação do momento.	34
2.3.3 Equações simplificadas:	36
3 MODELAGEM NUMÉRICA.	38
3.1 MODELAGEM DA TUBULAÇÃO	39
3.2 MODELAGEM DA VÁLVULA	41
3.3 MODELAGEM DA CHAMINÉ DE EQUILÍBRIO	42
3.4 MÉTODO NUMÉRICO PARA RESOLUÇÃO DO MODELO	44
3.4.1 Método de Euler	44

3.4.2 Método Runge-Kutta	45
3.4.2.1 Runge Kutta explicito:.....	47
3.4.2.2 Runge Kutta de Segunda Ordem	47
3.4.2.3 Runge Kutta de Quarta Ordem (RK4).....	49
3.4.2.4 Runge Kutta implícito:.....	50
3.4.2.5 Método Newton Rhapson:	50
4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	53
4.1 CENARIO I: SEM CHAMINÉ DE EQUILIBRIO:	53
4.2 CENARIO II: COM CHAMINÉ DE EQUILIBRIO.....	57
4.3 CENARIO III. CHAMINE DE EQUILIBRIO, VARIANDO POSIÇÃO.	60
4.4 CENARIO IV: COM CHAMINÉ DE EQUILIBRO, VARIANDO O TEMPO DE FECHAMENTO.	64
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	66
5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	67

1. INTRODUÇÃO

A participação de energias renováveis na matriz energética brasileira em 2017 se manteve entre as mais elevadas do mundo, atingindo valores superiores a 40%. O Brasil possui uma capacidade instalada de geração hidrelétrica de 96,925 GWh segundo a EPE (2017), e também existe um grande potencial hídrico a explorar, o qual ainda pode ser aproveitado por novos empreendimentos de pequenas e grandes centrais hidrelétricas instaladas em todo o seu território.

O crescimento constante na demanda de energia elétrica, as variações da carga e da geração, além de crises hídricas, como ocorreu em 2014, são fatores que tem forçado as usinas hidrelétricas operarem fora das condições ótimas. Estes fatores impõem uma maior possibilidade de ocorrência de fenômenos hidráulicos não desejados, como aumento de pulsações de pressão no sistema, aumento do risco de ocorrência de falhas, danos, acidentes ou redução da confiabilidade operativa e vida útil do sistema (MARRA, 2017). Tais situações são causados pela aparição de fenômenos de ressonância e instabilidade hidráulica, as quais podem estar significativamente influenciadas pela flutuação da velocidade e pressão na região de origem (DOERFLER, 2009)

A instabilidade proporciona ganhos dinâmicos nas flutuações de pressão com capacidade de comprometer a integridade estrutural das unidades geradoras, através de interações fluido-estrutura pelas vibrações causadas (NICOLET, 2007)

O crescimento da oferta de energia hidrelétrica vem aumentando nos últimos anos, porém o elevado custo de implementação de novas usinas é uma das principais desvantagens. A elevada capacidade mundial de geração hidrelétrica implica que melhorias na eficiência dos equipamentos eletromecânicos, maior controle nas condições de operação, resultariam num importante aumento da oferta (NICOLET, 2007). A potência específica e eficiência das unidades geradoras está constantemente aumentando, e isso gera uma maior exigência das estruturas das turbinas, isto requer a integração de novas tecnologias e metodologias para melhorar a performance dinâmica, assim como um profundo conhecimento do comportamento de cada componente hidráulico, em diferentes condições operativas (MARRA, 2017). Essas informações são cruciais para avaliar os procedimentos de manutenção, a precaução operativa, e na proposta de melhorias na fase de projeto de novas usinas.

1.1 JUSTIFICATIVA

Para atingir o objetivo de melhorar a performance global de um sistema hidráulico, é preciso continuar desenvolvendo ferramentas experimentais e numéricas apropriadas para um melhor entendimento dos processos envolvidos, e assim poder prever com maior precisão o comportamento dos diferentes componentes de uma usina hidrelétrica em diferentes condições de operação (NICOLET, 2007).

Alguns autores afirmam que a predição do comportamento hidráulico de um sistema comparando pelas leis de similaridades hidráulicas entre modelo e protótipo não é suficiente devido vários fatores (MARRA, 2017; NICOLET, 2007), entre eles: diferença do número de Reynolds e do número de Froude entre modelo e protótipo afeta a eficiência hidráulica, e este último afeta a estabilidade das pulsações, devido a alterações na cavitação e na alteração da hidro-elasticidade do fluido (DOERFLER, 2009). Além de melhorar a performance de usinas hidrelétricas existentes, a modelagem matemática destes sistemas é fundamental no aspecto de segurança, porque são usadas para previsão de situações críticas que podem causar acidentes de grande escala (HASLER, 2010).

Um desses exemplos é o caso da usina de Sayano-Shushenskaya, a maior hidrelétrica da Rússia até 2009 FIGURA 1. O relatório oficial do acidente indica que foi causado principalmente pelas vibrações da turbina que levaram a danos por fadiga das montagens, causando a morte de 75 pessoas e perdas econômicas em torno a 523 milhões de dólares (HASLER, 2010).

FIGURA 1: Fotos de acidente em Central Hidrelétrica na Rússia



FONTE: (HASLER, 2010). Antes e depois do acidente

Com a disponibilidade de hardware computacional cada vez mais avançado e com um preço mais competitivo, o processo de modelagem e simulação computacional de um projeto de engenharia ou de pesquisa científica tem se confirmado como uma etapa crucial e obrigatória no desenvolvimento. Tanto considerando o aspecto econômico, e as dificuldades que acarretam a realização de medições experimentais, como também pela possibilidade de ter um controle mais específico de determinados parâmetros físicos que não sempre podem ser medidas diretamente.

Considerando por exemplo, que as variações nas condições de contorno do escoamento no tubo de sucção, a frequência natural de oscilação da velocidade ou pressão do fluido de uma turbina pode também aumentar as possibilidades de amplificação da própria excitação e de interação dinâmica da mesma com todo o sistema (MARRA, 2017).

Este trabalho apresenta uma modelagem matemática de um sistema hidráulico utilizando dois métodos: O Método Runge Kutta Explícito, e Método de Runge Kutta Implícito não linear para simulação sob diferentes cenários e condições de operação.

Na primeira parte do estudo, são apresentados os diferentes modelos matemáticos que descrevem os fenômenos físicos e cada componente presente no sistema. Também se apresenta uma descrição detalhada do método para resolver os modelos matemáticos, assim como as condições de contorno dos estudos de caso. Na sequência apresenta-se uma análise dos resultados obtidos para cada cenário e por fim as considerações finais e referências bibliográficas.

1.2 OBJETIVOS

Desenvolvimento de uma simulação numérica do fenômeno hidro acústico para avaliação do fenômeno transiente de uma rejeição de carga, em diferentes condições de operação de um sistema hidráulico.

1.2.1 Objetivos específicos

Desenvolver o modelo matemático hidro acústico pela analogia elétrica equivalente para cada componente do sistema hidráulico estudado

Realizar simulações de transientes hidráulicos de diferentes cenários e posterior comparação com a literatura.

Analisar a influência da presença e posição de uma chaminé de alívio num sistema hidráulico.

1.3 METODOLOGIA

Será proposto um modelo computacional de um sistema hidráulico básico composto por uma tubulação com paredes elásticas, uma chaminé de equilíbrio, e uma válvula para estudar o fenômeno transiente causado por um fechamento repentino da válvula. Será estudado o comportamento oscilatório das ondas do escoamento durante o fechamento em diferentes condições.

O sistema de equações diferenciais que modela o fenômeno físico será resolvido numericamente utilizando os métodos Runge Kutta explícito (RK4) e Runge Kutta Implícito acoplado com o método Newton Raphson para resolução do sistema de equações não lineares para determinar iterativamente os coeficientes do método Runge Kutta.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo tem como finalidade apresentar e discutir todos os conceitos envolvidos na realização do trabalho, as definições da mecânica dos fluidos, a modelagem matemática dos fenômenos físicos estudados, a descrição de cada componente avaliado, e o desenvolvimento teórico da metodologia numérica proposta para resolver o problema proposto.

2.1 MECÂNICA DOS FLUIDOS

Esta área da mecânica estuda o comportamento e as propriedades do fluido em repouso ou em movimento, assim como suas aplicações na engenharia. Foi tradicionalmente aplicada em diferentes áreas, como desenho de canais, barragens, bombas, tubulações, dutos e sistemas de refrigeração. E continua até a atualidade sendo aplicada nas mais diversas áreas da ciência, na geração de energia, com , centrais hidrelétricas, turbinas eólicas, geração de energia a partir das ondas do mar; em biomedicina desenvolvendo corações artificiais, válvulas e outros órgãos; no estudo de fenômenos naturais assim como tornados, furacões e tsunamis, e também em aplicações mais avançadas e específicas como micro fluidos para administração precisa de medicamentos (FOX et al., 2016). Um dos fundamentos desta rama da mecânica consiste em assumir uma continuidade do fluido, o qual significa que a variação das suas propriedades é suave o suficiente para usar o cálculo diferencial na análise da sustância (WHITE, 1999).

2.1.1 Fluido:

São todas as substâncias que se deformam continuamente sob aplicação de uma força tangencial ou cisalhante, sem importar a intensidade da mesma (FOX et al., 2016). Também se definem como toda substância capaz de escoar e cujo volume toma a forma de seu recipiente. Todos os fluidos possuem um certo grau de compressibilidade e oferecem pequena resistência à mudança de forma (WHITE, 1999). Do ponto de vista da mecânica de fluidos, toda matéria pode ser diferenciada somente em dois estados, fluido e sólido. A diferença entre estes incide na reação dos seus átomos ante a aplicação de um esforço cisalhante, um sólido resiste a toda deformação estática e um fluido não (FOX et al., 2016).

Na modelagem matemática de fenômenos hidráulicos é fundamental entender as definições de campo de velocidade, campos de tensão, viscosidade, densidade, pressão, propagação de ondas de pressão, fator de atrito, e outras variáveis importantes na descrição do fenômeno hidráulico.

2.1.2 Campo de velocidade:

O campo de velocidade é uma função vetorial característica de um fluido, que depende da posição no espaço (x,y,z) e do tempo (t). Calcular este campo de velocidade é fundamental na resolução de um problema, devido a sua interação com outras propriedades termodinâmicas do fluido, como densidade, pressão e temperatura (WHITE, 1999).

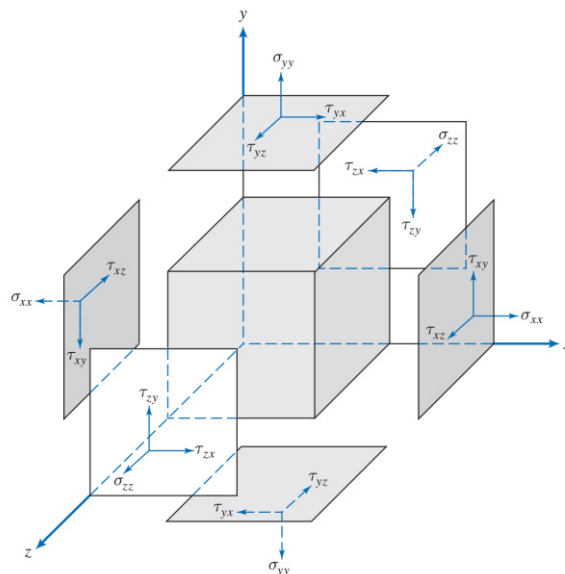
2.1.3 Campos de tensão

Se considera fundamental compreender quais tipos de forças interatuam com o fluido. Estas podem estar relacionadas ao contato com outras partículas ou superfícies sólidas assim como pressão e atrito. E podem ser geradas por forças externas, assim como gravidade ou campos eletromagnéticos. Para visualizar esta situação observamos como na FIGURA 2 uma partícula do fluido sofre a ação de forças em todas direções dos seis planos. A tensão num determinado ponto pode ser especificado por nove componentes (FOX et al., 2016).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

onde σ denota a tensão normal, e τ denota a tensão cisalhante.

FIGURA 2: Tensões em um cubo infinitesimal de fluido



FONTE: (PRITCHARD; LEYLEGIAN, 2011)

2.1.4 Pressão:

Assim como a velocidade, a pressão é uma das variáveis mais dinâmicas dentro da mecânica dos fluidos. A pressão e a tensão de compressão num determinado ponto de um fluido e gradientes de pressão derivam no escoamento do fluido, especialmente em tubulações (WHITE, 1999).

2.1.5 Densidade ou massa específica:

A densidade do fluido corresponde a unidade de massa por unidade de volume, é altamente variável para os gases, dependendo das condições de temperatura e pressão. Em quanto que para líquidos é relativamente constante.

2.1.6 Viscosidade:

Está relacionada com a capacidade do fluido de escoar em uma superfície. Sustâncias com alta viscosidade requerem maior esforços para promover deslocamento relativo entre camadas do fluido. O fluido é denominado newtoniano quando apresenta uma relação linear entre a tensão cisalhante e os deslocamentos (FOX et al., 2016).

2.1.7 Regimes de escoamento:

Existe uma classificação dos fluidos segundo o comportamento em relação a diferentes variáveis. Um escoamento pode apresentar um comportamento dependente da direção da trajetória das partículas que o compõem em relação a dependência do estado de organização do escoamento. Segundo Chaundhry (2014) podem ser classificadas em:

- a) Escoamento em regime permanente ou estacionário: Quando as condições do fluido, tais como pressão e velocidade num determinado ponto são constante no tempo. Estas propriedades podem variar de um ponto para outro do escoamento, mas se mantêm constantes em cada ponto imóvel do espaço, para qualquer instante, isto é, a pressão e velocidade em um ponto são funções exclusivamente das coordenadas do ponto, e são independentes do tempo. Porém a corrente de fluido é considerada estável.
- b) Escoamento em regime não permanente: Quando as condições do fluido num determinado ponto variam com o tempo. Todo escoamento turbulento pode ser considerado não permanente, devido à constante variação das

suas condições num ponto. A corrente do fluido é dita instável. As pressões e velocidades são dependentes tanto da posição como também do tempo.

- c) Escoamento em regime transiente: consiste na etapa intermediária, quando o escoamento varia de um estado estacionário para outro.
- d) Escoamento laminar ou uniforme: Quando a velocidade do escoamento é constante com respeito à distância para qualquer instante.
- e) Escoamento não linear: Quando a velocidade varia com a posição da partícula.

2.1.8 Número de Reynolds:

Este número adimensional determina a importância relativa dos efeitos inerciais e viscosos. Para situações onde o número de Reynolds é pequeno são denominados escoamentos lentos e viscosos, devido à maior participação das forças viscosas quando comparadas com as forças inerciais associadas à aceleração ou desaceleração das partículas do fluido (REYNOLDS, 1883). A equação é a expressão utilizada para o cálculo do número de Reynolds para escoamentos internos é:

$$Re = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} \quad (1)$$

2.1.9 Fator de atrito

Este coeficiente adimensional, diz respeito a resistência ao escoamento e depende dos parâmetros geométricos, tais como o diâmetro D , o comprimento L , e a rugosidade da tubulação. E também depende das condições do fluido, como a velocidade do escoamento, a massa específica ρ e a viscosidade μ . Para a determinação do coeficiente de atrito pode-se optar pelo diagrama de Moody, (MOODY, 1944) ou por modelos matemáticos que ajudam na estimação do coeficiente de atrito para regimes laminares e turbulentos. Para escoamento laminar e interno, isto é, número de Reynolds menor a 2320, pode ser utilizada a equação (2). E para o escoamento turbulento se utiliza a equação (3), conhecida como a equação de Haaland, HAALAND (1983), uma aproximação da equação (4) conhecida como equação implícita de Colebrook-White (COLEBROOK; WHITE, 1937)

$$\lambda_{laminar} = \frac{64}{Re} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{turbulento}}} = -1.8 \left[\left(\frac{e}{3.7 D} \right)^{1.1} + \frac{6.9}{Re} \right] \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\left(\frac{e}{3.7 D} \right) + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right] \quad (4)$$

2.2 FENOMENOS DE TRANSIENTES HIDRAULICOS

O estudo de fenômenos transientes se iniciou com as pesquisas da propagação das ondas de som no ar, e a propagação de ondas em águas rasas, assim como também o fluxo de sangue nas artérias.

Existem vários fenômenos que podem causar os transientes hidráulicos, como foi mencionado no exemplo, em geral, estes acontecem quando as condições de um fluxo variam de um estado para outro, isto é, as condições do fenômeno transiente se iniciam quando o regime permanente é interrompido por uma perturbação que pode ser planejada, acidental pelas condições de operação, ou causadas por variações no fluxo de entrada e saída próprias do sistema. Segundo a Chaudry (2014), as causas mais comuns dos fenômenos transientes em sistemas de engenharia são os seguintes:

- a) Abertura, fechamento ou ruptura de válvulas na tubulação.
- b) Partida ou parada de bombas
- c) Partida de uma turbina hidráulica
- d) Vibração das palhetas do rotor
- e) Aumentos repentinos no fluxo do rio

Existem vários métodos para controlar estes transientes hidráulicos (TULLIS, 1989). Dentre eles se destacam os seguintes:

- a) Aumentar o tempo de abertura e fechamento das válvulas
- b) Projetar instalações especiais para enchimento, lavagem e remoção de ar de tubulações.
- c) Aumentar a classe de pressão do gasoduto
- d) Limite a velocidade do fluido na tubulação
- e) Reduzir a velocidade das ondas alterando o tipo de tubo ou injetando ar.
- f) Utilização de válvulas de alívio, tanques de compensação, câmaras de ar.

As equações que descrevem o aumento de pressão ΔH causados por uma variação repentina na velocidade ΔV , são derivadas da conservação de momento aplicada a um volume de controle de uma seção de área da tubulação.

Para entender o fenômeno de transientes hidráulicos se deve observar uma tubulação com um determinado fluxo de água, com uma válvula de fechamento no final. Inicialmente se desconsidera o atrito. A válvula se encontra totalmente aberta com uma velocidade inicial do fluido de V_0 e uma pressão inicial H_0 na válvula. Num instante inicial t_0 , a válvula é repentinamente fechada, reduzindo o fluxo a zero instantaneamente. A velocidade é alterada para $V_0 + \Delta V$, e isto causa uma variação na pressão que passa a ser $H_0 + \Delta H$, e para um fluido ligeiramente compressível a densidade também varia de $\rho_0 + \Delta \rho$. Neste instante toda energia cinética é transformada, aumentando a pressão na válvula e no reservatório. A onda de pressão de magnitude ΔH é refletida viajando em direção montante, e em seguida volta novamente para a válvula, causando uma oscilação de pressão na tubulação. A velocidade da onda de pressão é denotada habitualmente pela letra **a**, e para o caso de paredes rígidas, o escoamento passa de não instável e permanente impondo a velocidade **a** na direção montante, e a velocidade do escoamento de entrada e de saída do volume de controle são $(V_0 + a)$ e $(V_0 + \Delta V + a)$ respectivamente (CHAUDHRY, 2014). Desconsiderando o atrito e fazendo uma análise da segunda lei de Newton ao sistema, é possível obter a seguinte expressão:

$$\Delta H = -\frac{1}{g}(V_0 + a)\Delta V \quad (5)$$

Porém, como a velocidade **a** é significativamente maior a V_0 , este último termo pode ser desconsiderado. Assim a equação (5) fica

$$\Delta H = -\frac{a}{g}\Delta V \quad (6)$$

O sinal negativo indica que a pressão aumenta para uma redução na velocidade e vice-versa. E a partir da conservação de massa no volume de controle pode chegar a expressão seguinte, desconsiderando variações na densidade (CHAUDHRY, 2014):

$$\Delta V = -\frac{\Delta \rho}{\rho_0}a \quad (7)$$

Assim, o módulo volumétrico é um parâmetro que descreve a tendência de um material em se deformar em todas as direções quando uniformemente carregado hidrostáticamente (STREETER; WYLIE, 1966) e pode ser calculado como segue:

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho_0} \quad (8)$$

Onde também é possível utilizar a relação, para reescrever a equação (8) como segue:

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (9)$$

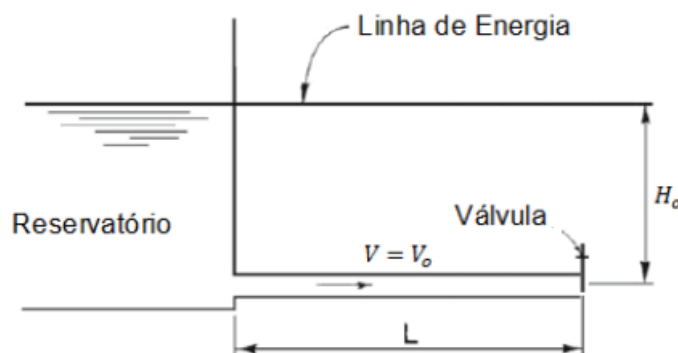
Lembrando que esta expressão para a velocidade da onda é válida somente para fluidos ligeiramente compressíveis e confinados numa tubulação rígida.

2.2.1 Propagação de ondas de pressão

Para explicar o transiente hidráulico a ser estudado, o golpe de aríete, será discutido um escoamento transiente num sistema hidráulico com um nível de reservatório constante, uma tubulação com paredes elásticas, isto é, elas expandem quando a pressão interna aumenta e contraem quando a pressão reduz.

Entre as características do sistema, temos um reservatório com nível constante H_0 , uma tubulação com comprimento L e vazão Q_0 , com uma válvula na extremidade jusante, como observado na FIGURA 3

FIGURA 3: Esquema de sistema hidráulico com paredes elásticas.



FONTE: Adaptado de (CHAUDHRY, 2014)

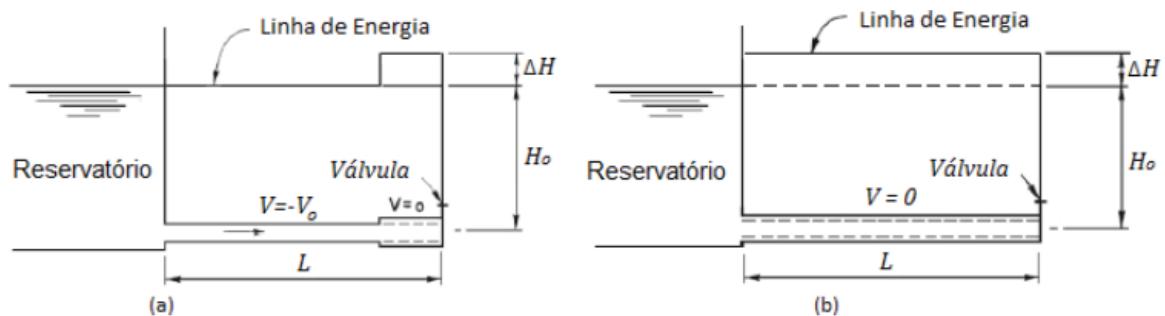
Inicialmente, a válvula se encontra totalmente aberta com o fluxo interno estável, no tempo inicial $t_0 = 0$, a válvula passa a ser fechada instantaneamente, e logo

após uma sequência de quatro eventos acontece, formando um período de oscilação. Para o caso sem atrito as ondas serão quadradas.

- Etapa 1: ($0 < t \leq L/a$)

No instante inicial, a velocidade do escoamento na válvula é reduzida a zero. A partir desse momento, a pressão do escoamento aumenta em ΔH , e passa a dominar todo o escoamento do sistema. Por causa deste aumento de pressão, sucede uma expansão na área transversal do tubo (como observado pelas linhas pontilhadas, a partir da FIGURA 4-a) e com isto, a velocidade do fluido torna-se nula nesta região. Pode se observar na FIGURA 4 como este aumento de pressão rapidamente atua em toda a tubulação de adução, e consequentemente também se anula a velocidade do escoamento. Ao ser comprimido o fluido aumenta a densidade deste e uma onda de pressão se propaga na direção montante, e a energia cinética se transformou em energia elástica. Se L é o comprimento do tubo e a é a velocidade da onda de pressão, o tempo necessário para atingir o reservatório é $t=L/a$, neste instante toda a tubulação se expande, a velocidade é nula, e a pressão aumentou para $H_0+\Delta H$ (FIGURA 4-b).

FIGURA 4: Comportamento do sistema na Etapa 1.

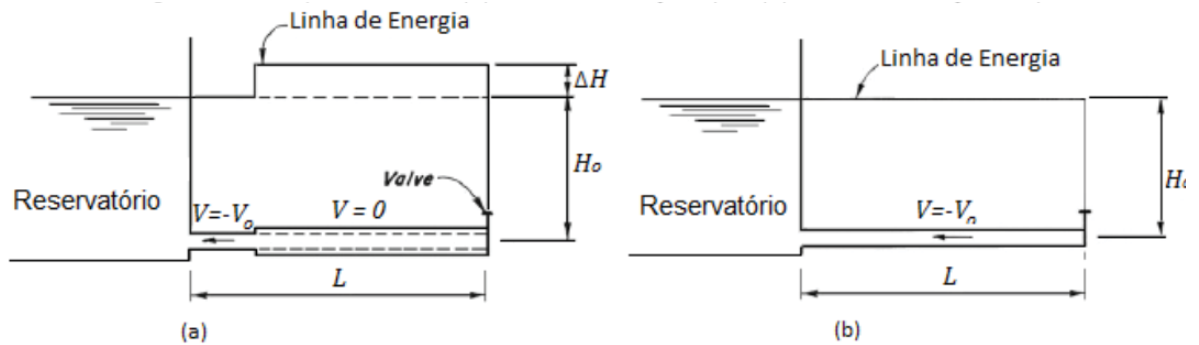


FONTE: Adaptado de (CHAUDHRY, 2014)

2.2.2 Etapa 2: ($L/a < t \leq 2L/a$)

No momento exato em que a onda de pressão atinge o reservatório, a pressão na seção do reservatório (esquerda) é H_0 , porém a pressão na seção montante (direita) é $H_0+\Delta H$, e como consequência deste gradiente de pressão, o fluido escoar desde a tubulação para o reservatório a uma velocidade $-V_0$. Por tanto, a velocidade do escoamento na entrada da tubulação é reduzida de zero para $-V_0$, causando também uma redução na pressão de $H_0 + \Delta H$ para H_0 , e uma onda de pressão negativa viaja em direção jusante para a válvula. No instante $t=2L/a$ quando a onda atinge a válvula fechada, toda a pressão na linha volta ao valor H_0 , e a velocidade do fluido é $-V_0$.

FIGURA 5: Comportamento do sistema na Etapa 2.

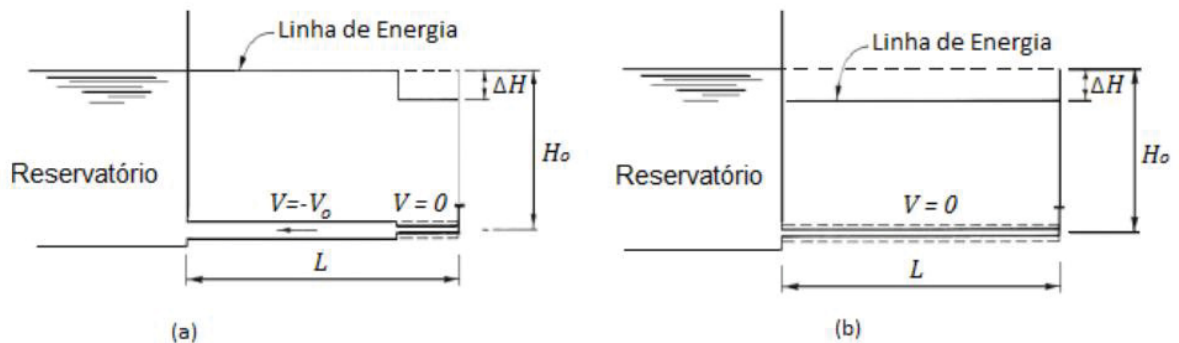


FONTE: Adaptado de (CHAUDHRY, 2014)

2.2.3 Etapa 3: $(2L/a < t \leq 3L/a)$:

Dado que a válvula se encontra totalmente fechada, uma velocidade negativa não pode ser mantida na válvula (FIGURA 6), por isso esta velocidade varia instantaneamente de $-V_0$ para zero, a pressão se reduz para $(H_0 - \Delta H)$, e uma onda negativa de pressão se propaga na direção do reservatório. Na FIGURA 6-b, no instante $t=3L/a$, a pressão ao longo da tubulação é menor por tanto existe uma compressão das paredes elásticas.

FIGURA 6: Comportamento do sistema na Etapa 3.



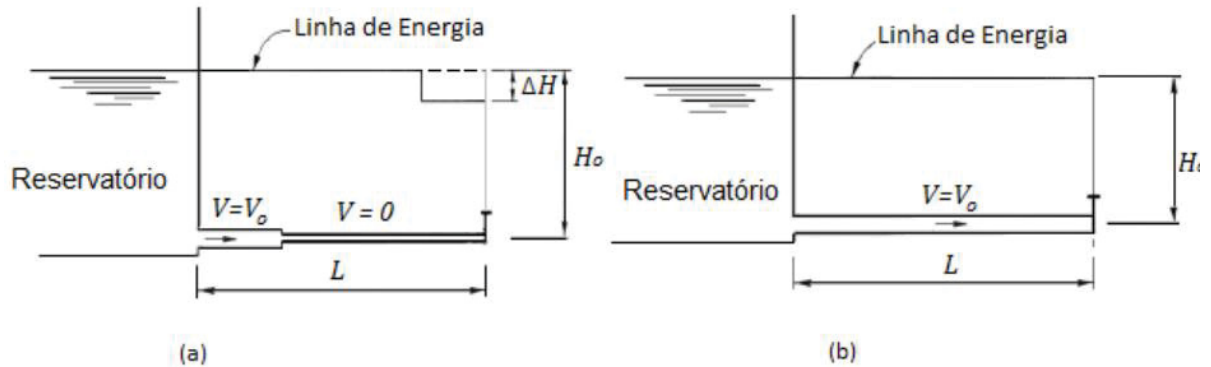
FONTE: Adaptado de (CHAUDHRY, 2014)

2.2.4 Etapa 4: $(3L/a < t \leq 4L/a)$:

Uma vez que a onda de pressão negativa atinge o reservatório, se cria uma condição de desequilíbrio e uma nova onda de pressão negativa retorna a válvula porém agora o reservatório se encontra na pressão maior. Por isto o escoamento agora vai em direção do reservatório para a tubulação com velocidade V_0 , e a pressão aumenta para H_0 . Assim no instante $t=4L/a$, as condições do escoamento são as

mesmas que no instante inicial, exceto que a válvula está completamente fechada (FIGURA 7-b).

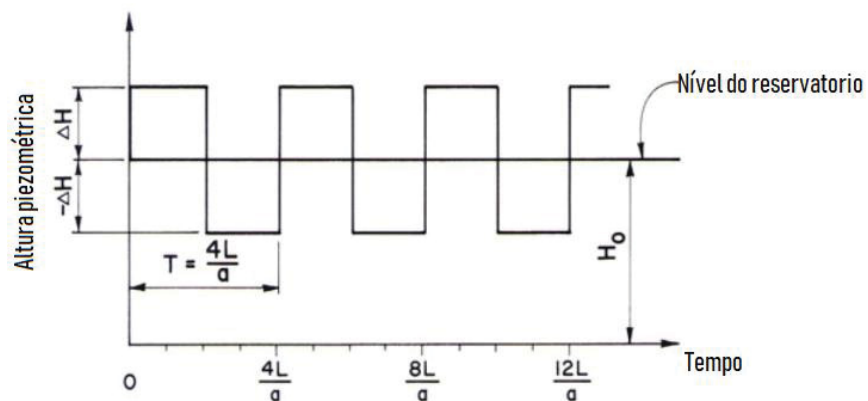
FIGURA 7: Comportamento do sistema na Etapa 4.



FONTE: Adaptado de (CHAUDHRY, 2014)

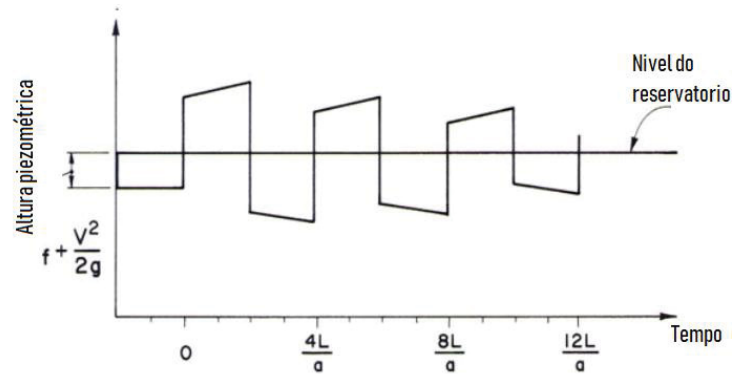
Transmissão e reflexão das ondas sem consideração de perdas por atrito são representados por uma oscilação em amplitudes constantes (FIGURA 8), repetindo-se a cada intervalo de $4L/a$, denominado período teórico da tubulação (CHAUDHRY, 2014). Porém, se as perdas por atrito são consideradas, num sistema real, as ondas de pressão são dissipadas devido às perdas de energia durante a propagação, essa variação pode ser observada na FIGURA 9.

FIGURA 8: Oscilação de pressão sem atrito



FONTE: Adaptado de TULLIS (1989)

FIGURA 9: Oscilação de pressão considerando perdas por atrito



FONTE: TULLIS (1989)

2.3 MODELAGEM MATEMATICA DO ESCOAMENTO

A partir da equação da conservação do momento, e da equação da continuidade é possível descrever apropriadamente o comportamento dinâmico de uma tubulação cheia de água.

As instalações hidráulicas apresentam dimensões longitudinais maiores que as dimensões transversais, justificando um enfoque unidimensional assumindo fluxo normal à seção transversal A, e tanto pressão, a velocidade e densidade uniformes na mesma seção de área.

2.3.1 Equação da continuidade:

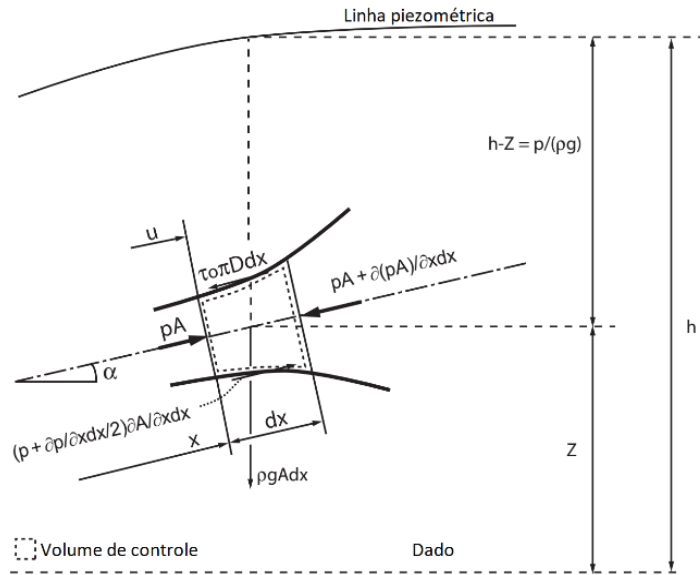
Considerando um volume de controle de comprimento dx , a equação de conservação de massa (10) para sistemas fluidodinâmicos determina que a taxa de variação da massa dentro de um volume de controle deve ser igual à taxa líquida do fluxo de massa que transpõem as superfícies de controle, como se observa na FIGURA 10.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} + \sum (\rho u A) = 0 \quad (10)$$

Aplicando a equação de continuidade sobre o volume de controle infinitesimal, com um escoamento de entrada e outro de saída, considerando simplesmente uma dimensão se obtém a equação (11)

$$\frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} - \rho u A + \left(\rho u A + \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} dx \right) = 0 \quad (11)$$

FIGURA 10: Volume de controle de largura dx



FONTE: Adaptado de NICOLET (2007) – Descrição diferencial do fluido

Após derivar e simplificar a equação (11) foi possível obter a seguinte expressão:

$$Adx \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \rho dx \frac{\partial(A)}{\partial t} + uA \frac{\partial(\rho)}{\partial x} dx + \rho A \frac{\partial(u)}{\partial x} dx + \rho u \frac{\partial(A)}{\partial x} dx = 0 \quad (12)$$

Ao dividir toda a equação (12) pelo termo ρAdx , e reagrupando obtém-se a seguinte equação, onde se observam as variáveis que são relevantes para o sistema.

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial(u)}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

Para que as equações diferenciais parciais se tornem ordinárias, se devem substituir os seguintes termos na equação (13).

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (14)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u \frac{\partial A}{\partial x} \quad (15)$$

Onde por fim, se obtém a equação seguinte:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{dA}{dt} \right) + \frac{\partial(u)}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

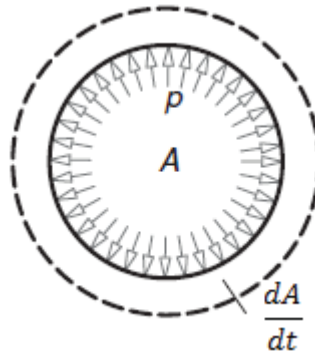
Uma vez obtido a Equação (16) é preciso determinar quais são os fatores que influenciam tanto a densidade quanto a área transversal à velocidade, por isso deverá ser tratado como que a densidade e a área transversal ao escoamento influenciam a pressão e a vazão, duas variáveis hidráulicas. De acordo com Chaudry (2014), para

que a modelagem do escoamento represente as variações de pressão no espaço e no tempo, é necessário assumir que a variação da área transversal seja consequência somente do aumento de pressão que ocorre durante os transientes hidráulicos. Com isso, o fluido de trabalho apresenta um comportamento barométrico ($\rho = \rho(p)$). Equação (17), em que a variação de densidade é função somente da variação da pressão do escoamento

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{E_{\text{agua}}} \frac{dp}{dt} \quad (17)$$

Com respeito a variação da área transversal da tubulação, se considera que a variação de pressão decorrente da propagação da onda acústica durante os transientes hidráulicos é a responsável pela expansão a contração do fluido. Essa relação pode ser definida pelo mesmo princípio utilizado nos vasos de pressão, onde se relaciona os valores de tensão com os valores de pressão, como se observa na FIGURA 11: Área transversal de tubo elástico com variação de pressão. Onde, a área transversal da tubulação é definida pela expressão da área de um círculo, que possui uma variação temporal ao derivar sua expressão chegando à Equação (18), segundo Jovic (2013). Lembrando que o coeficiente de deformação ε pode ser calculado segundo as expressões da equação (19).

FIGURA 11: Área transversal de tubo elástico com variação de pressão



FONTE: (JOVIC, 2013)

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi R \frac{dR}{dt} \quad (18)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o} = \frac{dR}{R} = \frac{dD}{D} \quad (19)$$

Combinando as equações (18) e (19) se obtém a relação entre a taxa de deformação adimensional com a taxa de variação temporal da área, que permite calcular a deformação radial da tubulação.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi R^2 \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = 2A \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (20)$$

A presença de tensões, causada pelo aumento da pressão na tubulação causam deformações. Considerando o escoamento unidimensional (HIBBELER, 2010). A Equação (20) provem da proporção de tensões e considerando o estresse axial nulo. Combinando as equações (20) e (21) se obtém a equação (22), a qual relaciona a variação da área com a variação da tensão no tempo:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (21)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{E}{2A} \frac{dA}{dt} \quad (22)$$

Para relacionar a variação de pressão interna no tubo, com o estado de tensão do material se utiliza a equação do vaso de pressão cilíndrica (HIBBELER, 2010).

$$\sigma = PD/2e \quad (23)$$

Que derivando e rearranjando, leva à equação (24) que relaciona a taxa de variação da tensão com a variação da pressão. A qual comparando com a equação (23) permite obter a relação entre variação da área de seção transversal com a pressão na equação (25).

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\frac{D}{2e}}{\left(1 - \frac{pD}{2eE}\right)} \frac{dp}{dt} \quad (24)$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{\left(\frac{eE}{D} - \frac{p}{2}\right)} \frac{dp}{dt} \quad (25)$$

Substituindo a equação (25) na equação da continuidade temos:

$$\left(\frac{1}{\left(\frac{eE_{steel}}{D} - \frac{p}{2}\right)} + \frac{1}{K} \right) \frac{dp}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

Como $\frac{p}{2} \ll eE/D$ para aplicações de engenharia, ficando a seguinte expressão.

$$\frac{1}{K} \left(\frac{1}{\left(\frac{eE_{steel}}{DK} \right)} + 1 \right) \frac{dp}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

Definindo a variável a como velocidade da onda de pressão para uma tubulação elástica cheia com fluido ligeiramente compressível.

$$a^2 = \frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \frac{DK}{eE}} \quad (28)$$

Substituindo na equação (26, e lembrando que a pressão depende da posição do tempo $p = p(x, t)$ chegamos a equação da continuidade:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

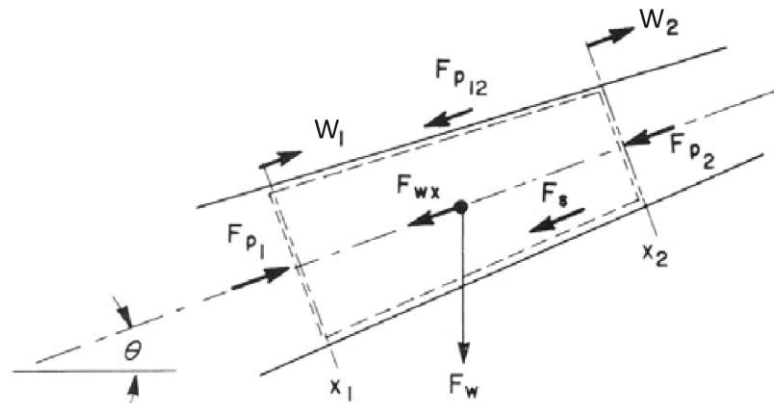
Usualmente para aplicações de engenharia e comum reescrever esta equação em função da altura piezométrica e da vazão a partir das relações $p = \rho gh$ e $u = Q/A$.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (30)$$

2.3.2 Equação do momento.

Para obter a equação do momento se aplica o Teorema de Transporte de Reynolds num volume de controle como na FIGURA 12: Volume de controle para equação do momento à propriedade extensiva do momento do fluido, a qual é igual a mV a qual corresponde a propriedade intensiva V .

FIGURA 12: Volume de controle para equação do momento



FONTE: (CHAUDHRY, 2014)

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} V \rho dV + [\rho A(V - W)V]_2 - [\rho A(V - W)V]_1 = \sum F \quad (31)$$

Aplicando a regra de Leibniz ao primeiro termo da equação e notando que $\frac{dx_1}{dt} = W_1$ e $\frac{dx_2}{dt} = W_2$ e possível chegar a expressão seguinte:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho AV) dx + (\rho AV)_2 W_2 - (\rho AV)_1 W_1 + [\rho A(V - W)V]_2 - [\rho A(V - W)V]_1 = \sum F \quad (32)$$

esta expressão pode ser simplificada, aplicando o teorema do valor meio ao primeiro termo e dividindo por Δx , obtendo a equação

$$\frac{d}{dt} (\rho AV) + \frac{(\rho AV^2)_2 - (\rho AV^2)_1}{\Delta x} = \frac{\sum F}{\Delta x} \quad (33)$$

A seguir, são analisadas as forças atuando no volume de controle da FIGURA 12. As forças de pressão nas seções transversais 1 e 2 são:

$$F_{p1} = p_1 A_1 \text{ e } F_{p2} = p_2 A_2 \quad (34)$$

Por outro lado, as forças de pressão nas laterais podem ser expressas como:

$$F_{p12} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (A_1 - A_2) \quad (35)$$

e a componente ao longo de eixo da tubulação do peso do fluido na direção jusante ((CHAUDHRY, 2014) pode ser expressa como:

$$F_{wx} = \rho g A (x_2 - x_1) \sin \theta, \quad (36)$$

onde θ corresponde ao ângulo entre a tubulação e a horizontal. A força de cisalhamento está dada pela equação (37):

$$F_c = \tau_o \pi D (x_2 - x_1) \quad (37)$$

Considerando o escoamento em direção jusante como positivo, temos que a somatória de todas as forças pode ser escrita como:

$$\sum F = p_1 A_1 - p_2 A_2 - \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (A_1 - A_2) - \rho g A (x_2 - x_1) \sin \theta - \tau_o \pi D (x_2 - x_1) \quad (38)$$

$$= \frac{1}{2} (p_1 - p_2) (A_1 + A_2) - \rho g A (x_2 - x_1) \sin \theta - \tau_o \pi D (x_2 - x_1) \quad (39)$$

Dividindo a equação(39) por $(\Delta x = x_2 - x_1)$ obtemos:

$$\frac{\Sigma F}{\Delta x} = \frac{(p_1 - p_2)(A_1 + A_2)}{2\Delta x} - \rho g A \sin\theta - \tau_o \pi D \quad (40)$$

Substituindo esta relação na equação (33) e considerando $\Delta x = 0$ no limite:

$$\frac{d}{dt} (\rho AV) + \frac{\partial(\rho AV^2)}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g A \sin\theta + \tau_o \pi D = 0 \quad (41)$$

Assumindo que as perdas de energia para uma determinada velocidade durante um estado transiente é a mesma que no regime permanente para aquela velocidade. Utilizando a equação de atrito de Darcy-Weisbach para calcular as perdas por atrito:

$$\tau_o = \frac{1}{8} \rho \lambda V |V| \quad (42)$$

Onde λ é o coeficiente de atrito de Darcy-Weisbach. Foi escrito V^2 como $V |V|$ para permitir escoamento nas duas direções (CHAUDHRY, 2014). E lembrando que $A = \frac{\pi D^2}{4}$ Substituindo esta relação na equação(41) e expandindo os termos entre parêntesis e rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} V \left[\frac{d}{dt} (\rho A) + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} \right] + \rho A \frac{\partial V}{\partial t} + \rho AV \frac{\partial V}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g A \sin\theta \\ + \frac{\rho A \lambda V |V|}{2D} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Segundo a equação da continuidade, a soma do primeiro termo é zero. A seguir se divide toda a expressão por ρA . Chegamos a equação do momento:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin\theta + \frac{\lambda V |V|}{2D} = 0 \quad (44)$$

Esta equação pode ser reescrita em função da altura piezométrica [mca] e da vazão [m³/s] como foi feito na equação da continuidade.

2.3.3 Equações simplificadas:

Para a maioria das aplicações de engenharia, os termos convectivos ($V \frac{\partial p}{\partial x}$) e $V \frac{\partial V}{\partial x}$ podem ser desprezados por serem muito menores que os demais termos. De forma similar o termo relacionado a inclinação ($\sin\theta$) (CHAUDHRY, 2014). Desconsiderando todos esses termos mencionados obtemos as equações governantes simplificadas

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{gA} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\lambda Q |Q|}{2gDA^2} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (46)$$

Tendo em consideração que:

$$h = Z + \frac{p}{\rho g}, \quad (47)$$

$$Q = C \cdot A, \quad (48)$$

3. MODELAGEM NUMÉRICA.

Esse conjunto de equações podem ser resolvidas a partir das condições iniciais por diferentes métodos numéricos, como Runge-Kutta, métodos das características, métodos dos elementos finitos ou métodos dos volumes finitos (NICOLET, 2007).

O coeficiente de atrito foi calculado usando a equação de Darcy para o fluxo laminar $f_q=64/Re$, e a equação de *Haaland* para o fluxo turbulento.

Estas equações podem ser reescritas de maneira simplificada fazendo uma analogia elétrica, isto é, o sistema de equações (45) e (46) é equivalente ao sistema de propagação de ondas elétricas e condutores elétricos, como a vazão sendo equivalente à corrente elétrica e a pressão sendo equivalente a uma tensão elétrica:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + L' \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + R'(Q)Q = 0 \quad (49)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{C'} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (50)$$

Nesta nova forma de escrever o sistema de equações com base na analogia elétrica, o parâmetro R representa a perda de energia por efeitos dissipativos, L representa os efeitos de inércia e C está relacionado com o efeito de armazenamento devido à compressibilidade do fluido e à elasticidade da tubulação (MARRA, 2017). Cada coeficiente possui um apóstrofe indicando uma dependência por unidade de comprimento do tubo a ser estudado, por tanto:

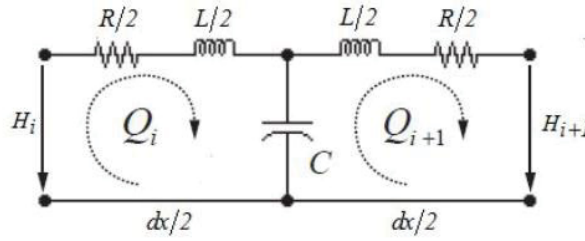
$$C' = \frac{gA}{a^2} [m] \quad (51)$$

$$L' = \frac{1}{gA} [s^2/m^3] \quad (52)$$

$$R' = \frac{\lambda|Q|}{2gDA^2} [s/m^3] \quad (53)$$

onde os termos linha, correspondem a capacitância, indutância e resistência hidro acústicas respectivamente, como indicado na figura (13).

FIGURA 13: Circuito elétrico equivalente do elemento do sistema hidráulico



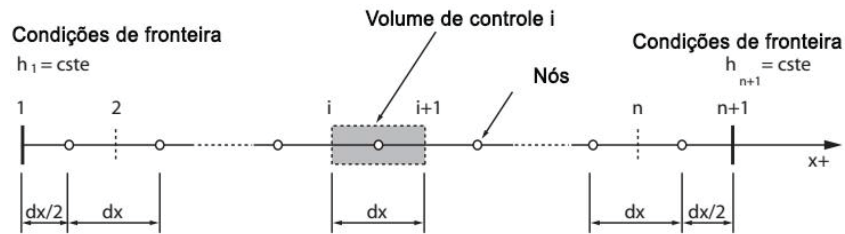
FONTE: MARRA (2017) .

3.1 MODELAGEM DA TUBULAÇÃO

Um dos desafios mais importantes desse sistema de equações diferenciais consiste na existência de descontinuidades na solução tais como ondas hidráulicas de choque, que dificultam as simulações numéricas devido as condições que devem ser consideradas para manter a propriedade conservativa (LAI; LIN; GUO, 2005).

Para resolver numericamente o sistema de equações diferenciais parciais se realizou a discretização espacial para um conjunto de n elementos de volume i da seguinte maneira:

FIGURA 14: Discretização espacial de uma tubulação de longitude



FONTE: NICOLET (2007).

A partir da FIGURA 14 e considerando o esquema centrado num nó na posição $i+1/2$, pode se obter as seguintes expressões para as derivadas espaciais:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{i+1/2} = \frac{h_{i+1} - h_i}{dx} \quad (54)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{i+1/2} = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{dx} \quad (55)$$

Substituindo estas expressões no sistema de equações, e possível isolar a expressão e reescrever na forma matricial para cada elemento da seguinte maneira:

$$[A] \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} + [B] \cdot \vec{x} = \vec{C} \quad (56)$$

onde as matrizes têm o seguinte formato:

discretização será utilizado o CFL. (Courant-Friederichs-Lewy), o qual relaciona dx e dt por meio da velocidade da onda a , assegurando que a causalidade do sistema a partir da informação dada não pode ter uma transição superior a velocidade da onda (NICOLET, 2007) O critério CFL é dado pela expressão:

$$dt < \frac{dx}{a}, \quad (61)$$

3.2 MODELAGEM DA VÁLVULA

A válvula causa uma queda de pressão em sistemas hidráulicos e depende da posição do obturador da mesma (NICOLET, 2007). Segundo Tullis, (1989). A válvula em regime transiente tem a vazão definida pelas seguintes equações:

$$Q_V = C_{Q(t)} A_t \sqrt{2gH} \quad (62)$$

$$h_v = \frac{Q_V |Q_V|}{C_{Q(t)}^2 2gH_0 A_t^2} \quad (63)$$

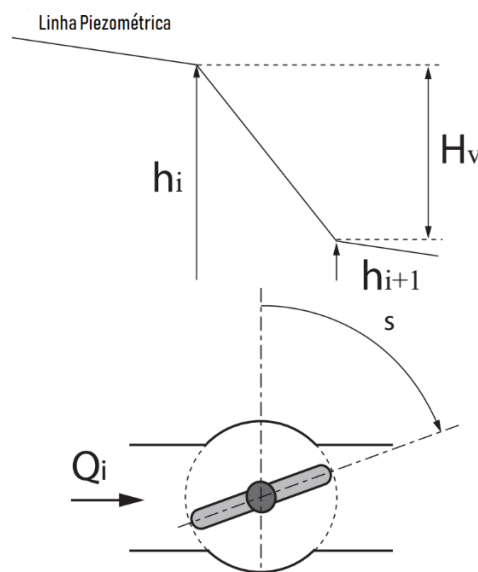
onde $C_{Q(t)}$ é o coeficiente de descarga da válvula que depende da lei de fechamento $\tau(t)$ expressas como:

$$C_Q(t) = \tau(t) C_{Q(0)}, \quad (64)$$

$$\tau(t) = 1 - \left(\frac{t - t_i}{t_f} \right)^{0.75} \quad (65)$$

onde t_i e t_f correspondem ao tempo de início e a duração do fechamento da válvula, respectivamente.

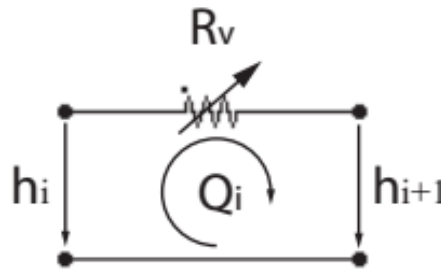
FIGURA 16: Discretização espacial de uma tubulação de longitude L .



FONTE: NICOLET (2007) – Variação da altura piezométrica com o fechamento da válvula.

Com respeito analogia elétrica, uma válvula se comporta como uma resistência variável, cujo valor depende do coeficiente de perda de carga, e da curva de fechamento da mesma.

FIGURA 17: Diagrama equivalente elétrico de uma válvula



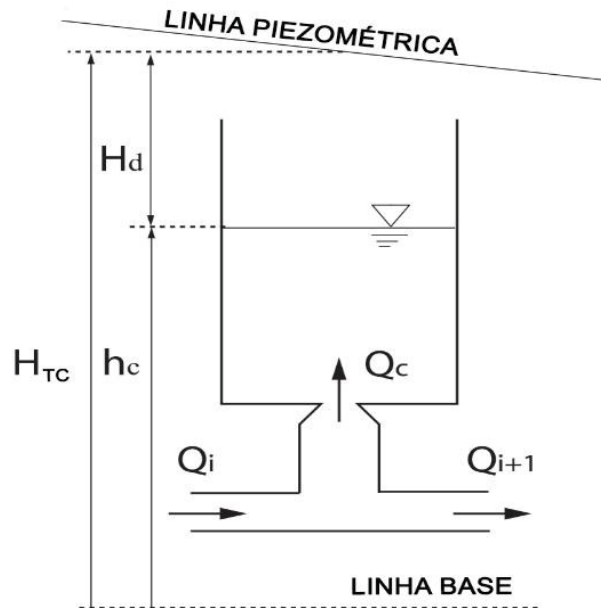
FONTE: NICOLET (2007) – Conjunto de n elementos discretizados.

3.3 MODELAGEM DA CHAMINÉ DE EQUILÍBRIO.

A chaminé de equilíbrio é um dispositivo de proteção contra efeitos de golpe de aríete, comportando-se como uma superfície livre para reflexão de ondas. A chaminé de equilíbrio reduz a amplitude da flutuação de pressão refletindo ou armazenando as ondas de pressão de entrada, reduzindo assim a aceleração ou desaceleração no túnel (CHAUDHRY, 2014). Por exemplo, as ondas de pressão causada por um fenômeno transiente como o golpe de aríete são refletidas ao tanque e nenhuma pressão transitória é transmitida para o túnel. Devido a isto, a elevação ou queda de pressão é menor do que sem um tanque de compensação, por tanto se não houver tanque, o túnel é projetado para suportar pressões causadas pelo golpe de aríete (STREETER; WYLIE, 1966).

Analogamente com um circuito elétrico, o tanque de compensação se comporta como uma capacitância, sendo esta diretamente à seção transversal do tanque (NICOLET, 2007). Cujas altura piezométrica H_{TC} é dada do diagrama a seguir

FIGURA 18: Diagrama do tanque de compensação



FONTE: NICOLET (2007) – Parâmetros do tanque de compensação.

A capacitância do tanque e a altura piezométrica são, respectivamente:

$$C_{CE} = A(z) \quad (66)$$

$$H_{CE} = h_c + R_d(Q_c)Q_c, \quad (67)$$

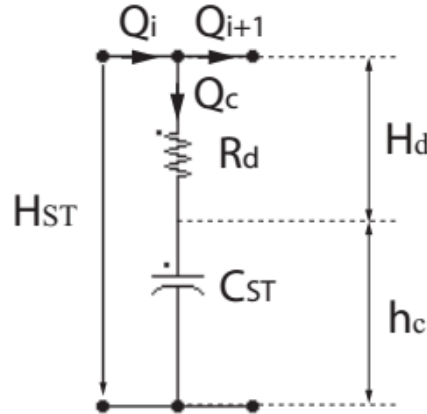
O fluxo de entrada e saída do tanque depende das variações repentinas na seção transversal, e com isto as perdas de energia. E estas perdas podem ser quantificadas segundo a seguinte expressão:

$$H_d = \frac{K_d}{2gA_{ref}^2} \cdot Q_c^2, \quad (68)$$

$$R_d(Q_c) = \frac{K_d(Q_c)|Q_c|}{2gA_{ref}^2}, \quad (69)$$

O circuito elétrico equivalente ao tanque está composto de uma resistência e uma capacitância em série, segundo a FIGURA 19: Circuito elétrico equivalente ao tanque de compensação. O fluxo de entrada no tanque é igual à diferença das descargas na junta T.

FIGURA 19: Circuito elétrico equivalente ao tanque de compensação



FONTE: NICOLET (2007) .

3.4 MÉTODO NUMÉRICO PARA RESOLUÇÃO DO MODELO

Para resolver o sistema de equações (56), podemos reescrevê-lo isolando o termo da derivada, isto é, obtemos uma equação do tipo $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A]^{-1}\vec{C} - [A]^{-1}[B] \cdot \vec{x} \quad (70)$$

3.4.1 Método de Euler

Com o rápido desenvolvimento dos computadores, o interesse neste método tem aumentado. O método consiste em dividir os intervalos desde x_0 até x_f em n subintervalos de largura h :

$$h = (x_1 - x_{(n-1)})/n \quad (71)$$

Dado um conjunto de equações diferenciais de primer ordem com valor inicial conhecido:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \quad (72)$$

Na sequência de pontos x_1, x_2, \dots , o método de Euler pode ser utilizado para calcular aproximadamente, $y_2 \approx y(x_2)$, usando a expressão;

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}), n = 1, 2, \dots, n \quad (73)$$

Porém o método de Euler para muitos casos é ineficiente, devido ao grande número de passos necessários para atingir uma boa precisão. Além disso, o acumulo de erros de arredondamento, quando muitas etapas são usadas, pode tornar os

resultados numéricos inutilizáveis (BOJANA ROSIĆ, 2017). A razão dessa baixa eficiência do método de Euler é baseada na aproximação da quadratura subjacente:

$$\int_{x_0}^{x_1} y'(x)dx \approx (x_1 - x_0)y'(x_0) \quad (74)$$

a qual é confiável somente quando $y(x)$ é um polinômio de primeiro grau.

3.4.2 Método Runge-Kutta

A ideia principal do método de Runge Kutta foi melhorar a precisão da estimativa numérica da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, por meio de considerar mais termos da expansão da série de Taylor. A série de Taylor é uma aproximação de funções através de uma série de potências ou soma de potências inteiras de polinômios (CANUTO; TABACCO, 2015) como segue:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \quad (75)$$

Essa série pode ser reescrita numa forma mais compacta como segue:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (76)$$

O método de Euler, explicado na seção anterior, consiste numa aproximação da função considerando os primeiros dos termos da série de Taylor e evidentemente quanto mais termos forem considerados a solução será mais precisa, porem dependendo do tipo de função $f(x,y)$, pode resultar muito complicado determinar as derivadas presentes nos termos da expansão. Em vista desta dificuldade o método de Runge Kutta propõe uma expressão para aproximar esses termos das derivadas.

Um Método Runge-Kutta, que inicia num ponto x_0 e tempo t_0 avaliado num intervalo de tempo finito, produz uma aproximação do valor de x_1 no tempo t_0+h da solução $x(t_0+h, y_0)$. Além disso, para calcular y_1 , o método de Runge Kutta calcula por meio de s etapas ou estágios intermediários. E mais precisamente, um método Runge-Kutta para um sistema de equações não autônomo, isto é, com formato $\frac{d\vec{y}}{dt} = f(t, \vec{y})$.

Substituindo a equação (74) pela seguinte formula:

$$\int_{x_0}^{x_1} y'(x)dx \approx (x_1 - x_0)y' \left(\frac{(x_0 + x_1)}{2} \right) \quad (77)$$

Ou por outra formula que seja exata para polinômios de segundo grau constitui a essência do método proposto por Runge. A utilização de estas aproximações, como uma segunda etapa deve ser avaliada. Isto é, $y'(x)$ primeiro deve ser avaliada de tal maneira que posteriormente $y(x_0+h/2)$ ou $y(x_0+h)$ possam ser aproximadas como preparação para a avaliação em $y'(x_0+h/2)$ ou $y'(x_0+h)$ respectivamente.

Considerando estas ideias, foi proposto obter métodos que aproximem, com o intuito de limitar o erro deste primer passo por um múltiplo de h^{p+1} , onde p é um inteiro conhecido como ordem do método, que assume valores cada vez maiores.

Um método com s etapas, pode ser representado por uma tabela conhecida normalmente como tabela de Butcher:

TABELA 1: TABELA DE BUTCHER

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss}
	b_1	b_2	\dots	b_s

FONTE: (BOJANA ROSIĆ, 2017)

Essa tabela também pode ser rerepresentada de maneira mais reduzida na forma matricial:

TABELA 2: FORMA MATRICIAL DA TABELA DE BUTCHER

c	A
	b^T

FONTE: (BOJANA ROSIĆ, 2017)

Nessa tabela, segundo Butcher (2016) dependendo dos valores da matriz A teremos:

- Se $a_{ij}=0$, para todo $j \geq i$; Método de Runge Kutta Explícito
- Se $a_{ij}=0$, para todo $j \geq i$, e pelo menos um $a_{ii} \neq 0$; Método de Runge Kutta Implícito Diagonal
- Se $a_{ij}=0$, para todo $j \geq i$ e todos $a_{ii} \neq 0$ Temos o método de Runge Kutta Implícito Diagonal Singular.
- Matriz inteira, $a_{ij} \neq 0$; Runge Kutta Totalmente Implícito.

A tabela de Butcher é uma representação conveniente dos diferentes métodos disponíveis. A matriz A indica a dependência com a derivada nas diferentes etapas, b^T é um vetor dos pesos associados as iterações (BOJANA ROSIĆ, 2017). Um método Runge Kutta é consistente somente se:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i, \quad \text{com } i = 2, 3, \dots, s. \quad (78)$$

Utilizando a TABELA 1: TABELA DE BUTCHER, a aproximação de saída deve ser calculada segundo:

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (79)$$

Onde:

$$k_i = f \left(x_0 + h \cdot c_i, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \quad (80)$$

3.4.2.1 Runge Kutta explícito:

São o conjunto de métodos onde A é uma matriz triangular inferior. E nela os coeficientes k são obtidos diretamente em cada iteração, isto é, cada valor k_i é definido somente a partir do anterior. Alguns deles são o método de Runge Kutta de segundo ordem RK2 ou método de Heunn, cuja tabela de Butcher e sistema de equações são:

TABELA 3: TABELA METODO DE HEUN

0	0	0
1/2	1/2	0
	0	1

FONTE: (BUTCHER, 2016)

3.4.2.2 Runge Kutta de Segunda Ordem

O método de Euler pode ser considerado como um método Runge Kutta de primeira ordem. Para a obtenção do método de segunda ordem se considera mais um termo da expansão da série de Taylor, substituindo as equações (71) e (72) como segue:

$$f(x, t) = f(x_0, y_0) + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2 f'(x_0, y_0)}{2} \quad (81)$$

Porem pela dificuldade que pode apresentar o cálculo da segunda derivada, Runge e Kutta propuseram escrever esta expressão da seguinte maneira:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \quad (82)$$

Onde os coeficientes são:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \end{aligned} \quad (83)$$

Esta expressão permite aproveitar a vantagem de um método de segunda ordem (maior precisão na aproximação), porém sem necessidade de calcular a derivada. Agora comparando esses termos com a expansão em série de Taylor se obtém um sistema de equações para os coeficientes (BOJANA ROSIĆ, 2017):

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 q_{11} &= 1/2 \end{aligned} \quad (84)$$

Esse sistema linear de equações tem 4 variáveis e 3 equações por tanto tem infinitas soluções possíveis. Assumindo o valor de uma das variáveis podem se obter as outras. Usualmente se assigna um valor à variável a_2 , e dependendo do valor que se escolha, se obtém os outros coeficientes dos métodos de segunda ordem, entre eles temos a método de Heun, o método do ponto meio, e o método de Ralston com a_2 igual a 1/2, 1 e 2/3 respectivamente (SANDRETTO; CHAPOUTOT, 2016).

Método de Heun:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + k_1 h) \end{aligned} \quad (85)$$

Método do Ponto Meio

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} k_1 h\right) \end{aligned} \quad (86)$$

Método de Ralston

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (87)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1h\right)$$

3.4.2.3 Runge Kutta de Quarta Ordem (RK4)

O método explícito mais conhecido e utilizado é o Método Runge Kutta de quarta ordem (RK4). Assim como também os métodos de segunda ordem, são usados para resolver equações diferenciais ordinárias na forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ com valor inicial $y(0) = y_0$ conhecido. A tabela de Butcher para este método é apresentada a continuação:

TABELA 4: COEFICIENTES DO RK4

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

FONTE: (SANDRETTO; CHAPOUTOT, 2016)

Este método é denominado de quarta ordem porque se origina na comparação dos primeiros quatro termos da expansão em série de Taylor com o seguinte formato de equação:

$$y_{n+1} = y_n + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4) \quad (88)$$

Uma das soluções mais populares para o sistema de equações formados a partir de esta comparação se definem a seguir:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (89)$$

Onde cada coeficiente k se calcula explicitamente:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + h k_1) \end{aligned} \quad (90)$$

Este método é razoavelmente simples e robusto, por isto costuma ser um bom candidato para encontrar a solução numérica de um sistema de equações diferenciais ordinárias (SANDRETTO; CHAPOUTOT, 2016).

3.4.2.4 Runge Kutta implícito:

Os métodos implícitos, possuem melhores propriedades e podem integrar o caso de fenômeno de rigidez (BOJANA ROSIĆ, 2017). Porém apresentam a dificuldade adicional da necessidade de resolução de um sistema de equações não lineares para os coeficientes k , que surgem das seguintes expressões:

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i h, x_{n-1} + h \sum_{j=1}^s k_j a_{ij}), \quad i = 1, \dots, s \quad (91)$$

$$x(t_n) = x(t_n - 1) + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (92)$$

Em casos especiais, como no caso de métodos diagonalmente implícitos, o sistema de equações tem s equações não lineares desacopladas:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n + c_1 h, x_n + h a_{11} k_1) \\ &\vdots \\ k_s &= f(t_n + c_s h, x_n + h a_{s1} k_1 + \dots + h a_{ss} k_s) \end{aligned} \quad (93)$$

E para resolver este sistema de equações e preciso usar métodos numéricos iterativos tais como o método de Newton-Rhapson ou o método de iteração de ponto fixo, ou método das secantes.

3.4.2.5 Método Newton Rhapson:

O sistema de equações não lineares obtido a partir das equações (91) e (92) será resolvido pelo método de Newton-Rhapson, que pode ser generalizado para um sistema multivariável da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_N) &= f_1(\vec{x}) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_N) &= f_2(\vec{x}) = 0 \\ &\vdots \\ f_N(x_1, \dots, x_N) &= f_N(\vec{x}) = 0 \end{aligned} \quad (94)$$

Se definem:

$$\vec{x} = [x_1, \dots, x_N]^T \quad (95)$$

$$\vec{f} = [f_1(x_1), \dots, f_n(x_N)]^T, \quad (96)$$

Com essas expressões o sistema de equações (94) pode ser reescrito na forma vetorial como:

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0 \quad (97)$$

Pode ser obtido o método de Newton Rhapson generalizado para o sistema multidimensional da equação (94) a partir da expansão em serie das N funções, desconsiderando os termos desde a segunda derivada.

$$\vec{f}_i(\vec{x} + \delta\vec{x}) = f_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} \delta x_j, (i = 1, \dots, N) \quad (98)$$

Reescrevendo estas N equações na forma vetorial temos:

$$\vec{f}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x} + \delta\vec{x}) \\ \vdots \\ f_N(\vec{x} + \delta\vec{x}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_N(\vec{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_N \end{bmatrix} \quad (99)$$

$$\vec{f}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) + \mathbf{J}_f(\vec{x})\delta\vec{x}, \quad (100)$$

onde \mathbf{J}_f é a matriz jacobiana definida como $\mathbf{J}_f(\vec{x}) = \frac{d}{d\vec{x}} \vec{f}(\vec{x})$, e a partir disso, assumindo $\vec{f}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = 0$, será possível achar as raízes da equação, para o caso não linear com a seguinte expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}_n - [\mathbf{J}(\vec{x}_n)]^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}_n) \\ \vdots \\ f_N(\vec{x}_n) \end{bmatrix} \quad (101)$$

O algoritmo do método Newton-Rhapson, assume que as expressões analíticas de todas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j}$, podem ser calculadas analiticamente, porem para o caso que isto não seja possível, ainda é possível estimar o valor das componentes J_{ij} , dado um \vec{x}_n e \vec{x}_{n+1} de duas iterações consecutivas utilizando a seguinte equação (BUTCHER, 2016):

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x_1^n, \dots, x_j^{n+1}, \dots, x_N^n) - f_i(x_1^n, \dots, x_N^n)}{x_j^{n+1} - x_j^n} \quad (102)$$

Entre alguns dos métodos implícitos podemos citar alguns deles com as suas respectivas tabelas de coeficientes (BOJANA ROSIĆ, 2017).

TABELA 5: Coeficientes Lobatto IIIA segunda ordem

0	0	0
1	1/2	1/2
	1/2	1/2

FONTE: (BOJANA ROSIĆ, 2017)

TABELA 6: Lobatto IIIA terceira ordem

0	0	0	0
1/2	5/24	1/3	-1/24
1	1/6	2/3	1/6
	1/6	2/3	1/6

FONTE: (BOJANA ROSIĆ, 2017)

TABELA 7: Coeficientes Lobatto IIIB segunda ordem

0	1/2	0
1	1/2	0
	1/2	1/2

FONTE: (BOJANA ROSIĆ, 2017)

TABELA 8: Lobatto IIIB terceira ordem

0	1/6	-1/6	0
1/2	1/6	1/3	0
1	1/6	5/6	0
	1/6	2/3	1/6

FONTE: (BOJANA ROSIĆ, 2017)

TABELA 9: Coeficientes Lobatto IIIC segunda ordem

0	1/2	-1/2
1	1/2	1/2
	1/2	1/2

FONTE: (BOJANA ROSIĆ, 2017)

TABELA 10: Lobatto IIIC terceira ordem

0	1/6	-1/3	1/6
1/2	1/6	5/12	-1/12
1	1/6	2/3	1/6
	1/6	2/3	1/6

FONTE: (BOJANA ROSIĆ, 2017)

Para as simulações neste trabalho foi o método implícito escolhido foi o método de terceira ordem Radau IA, com a seguinte tabela de coeficientes.

TABELA 11: Radau IA terceira ordem

0	1/4	-1/4
---	-----	------

2/3	1/4	5/12
	1/4	3/4

FONTE: (HAIRER; WANNER, 2015)

4. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção o modelo proposto será aplicado a duas configurações de sistemas hidráulicos, com a mesma lei de fechamento e os mesmos coeficientes de descarga em função da abertura da válvula, os casos considerados são i) Sem chaminé de equilíbrio ii) Com chaminé de equilíbrio, iii) Diferentes posições da chaminé e iv) Diferentes tempos de fechamento. Na sequência se propõe uma análise no domínio da frequência, identificando as fases principais. Será avaliada a resposta do modelo para o caso de diferentes condições da chaminé de equilíbrio, e também para diferentes tempos de fechamento da válvula.

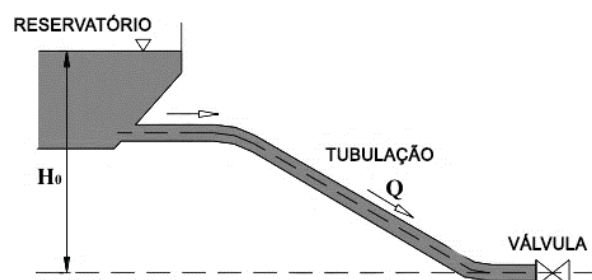
O escoamento do sistema hidráulico é considerado em regime permanente antes do fechamento, com uma vazão inicial constante de $0,47\text{m}^3/\text{s}$ e uma pressão de 150mca . A modo de validação do modelo, foram usados os parâmetros e as condições de um sistema hidráulico da literatura (ILIEV; IVLJANIN, 2015).

Todos os gráficos de pressão e vazão obtidos, serão apresentados normalizados em função da pressão ou vazão inicial respectivamente.

4.1 CENÁRIO I: SEM CHAMINÉ DE EQUILÍBRIO:

Para o primeiro caso, será analisado o fenômeno transiente causado por um fechamento repentino, em uma usina elementar, a qual consiste somente de um reservatório, a tubulação e a válvula, como se observa na FIGURA 20.

FIGURA 20: Cenário sem chaminé de equilíbrio

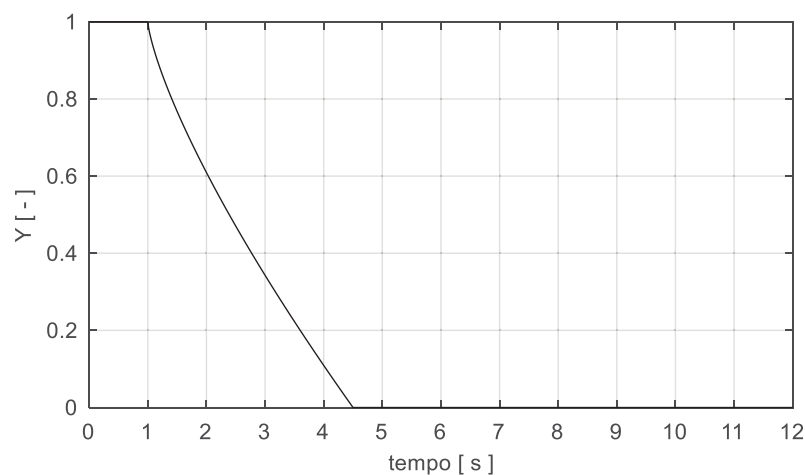


FONTE: Adaptado de (ILIEV; IVLJANIN, 2015).

A configuração do sistema hidráulico é apresentada na TABELA 12, com os seguintes parâmetros geométricos e físicos. Onde o coeficiente de atrito foi calculado usando a equação (3)

A lei de fechamento foi modelada usando a Equação (65). O gráfico da função da abertura em função do tempo pode ser observada na FIGURA 21. Conforme os parâmetros do primeiro cenário a válvula começam a fechar no instante $t=1s$ e durante 3,5 s. Segundo a Equação (64) existe uma relação linear entre a lei de fechamento e o coeficiente de descarga Q_0

FIGURA 21: Lei de fechamento da válvula

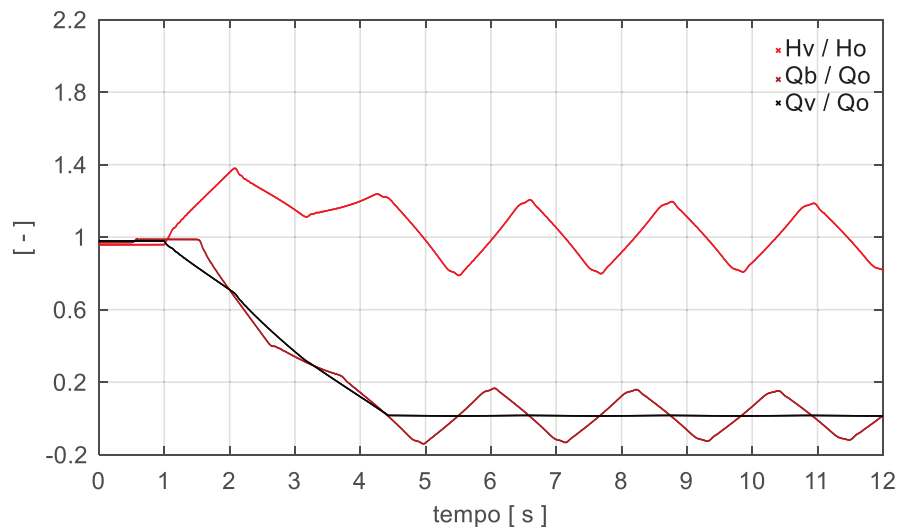


FONTE: Elaboração própria. .

Os resultados para este cenário utilizando o método Runge Kutta Explícito de Quarta Ordem, são apresentados na FIGURA 22, que contempla o comportamento dinâmico do sistema hidráulico durante a rejeição de carga (fechamento da válvula). É possível observar um comportamento periódico $T=2,17s$ e uma pressão máxima de $H_{max}=1,81$ mca. Observa-se que este valor é muito próximo ao período teórico $T=4L/a=2,16s$ conforme proposto por Tullis (1989).

Essa lei de fechamento proporcionou valores elevados de ΔQ_b , variação de vazão na entrada do sistema hidráulico. Outra maneira de avaliar a consistência da resposta do modelo é confronta-los com resultados provenientes dos cálculos analíticos.

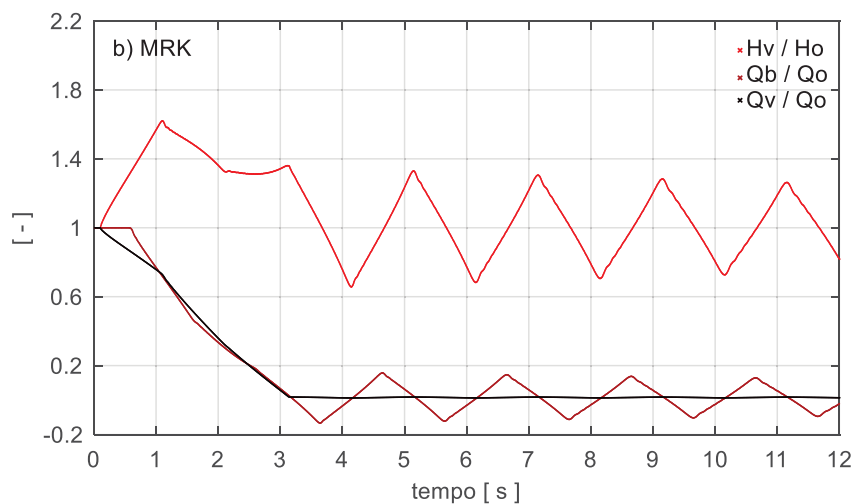
FIGURA 22: Oscilação de pressão e vazão durante o fechamento da válvula, no cenário I.



FONTE: Elaboração própria. .

O mesmo resultado foi obtido pelo método Runge Kutta Implícito Radau IA obtendo-se o seguinte resultado:

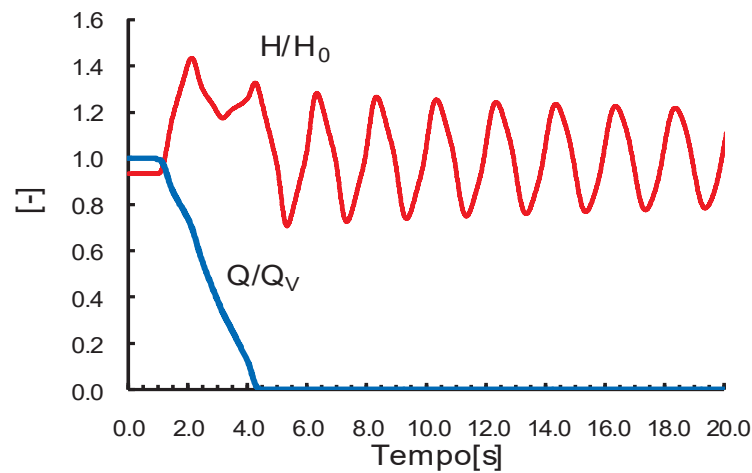
FIGURA 23: Metodo Runge Kutta Implícito no cenário I.



FONTE: Elaboração própria. .

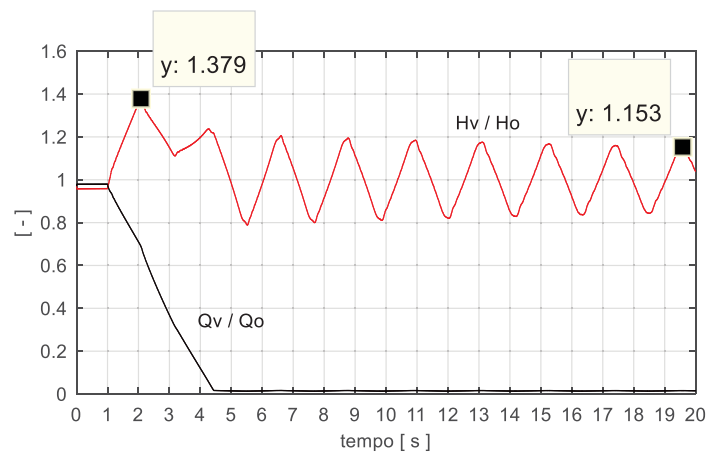
A modo de comparação podemos observar os resultados da oscilação obtidas na literatura (ILIEV; POPOVSKI; MARKOV, 2012). Em comparação com os gráficos obtidos utilizando o Método Runge Kutta Implícito de terceira ordem, que apresentou maior semelhança. Todos os próximos resultados que serão apresentados foram obtidos com o modelo implícito, devido a sua maior estabilidade numérica.

FIGURA 24: Oscilação de pressão e vazão durante causado pelo fechamento da válvula, no cenário I.



FONTE: (ILIEV; POPOVSKI; MARKOV, 2012). .

FIGURA 25: Oscilação de pressão na válvula durante o fechamento da válvula, no cenário I.

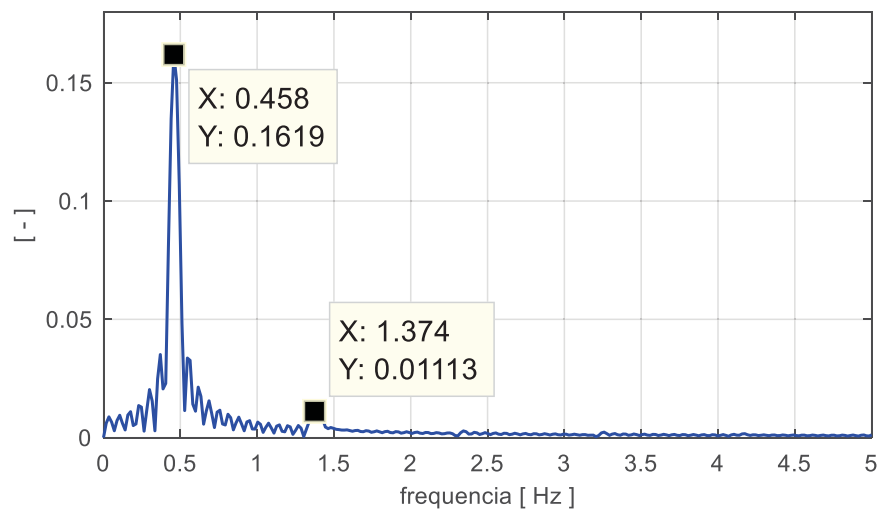


FONTE: Elaboração própria. .

É possível observar uma alta semelhança nos gráficos, a mesma frequência, o mesmo comportamento amortecido, porém uma diferença na concavidade da oscilação que pode ser resolvida aumentando o tamanho da malha, Para o nosso modelo isto aumenta consideravelmente o tempo de processamento.

Também foi feita a análise das frequências de oscilação principal por meio da aplicação de uma transformada de Fourier obtendo as duas frequências principais sendo 0,458Hz e 0.011Hz.

FIGURA 26:.. Frequências principais no cenário I.

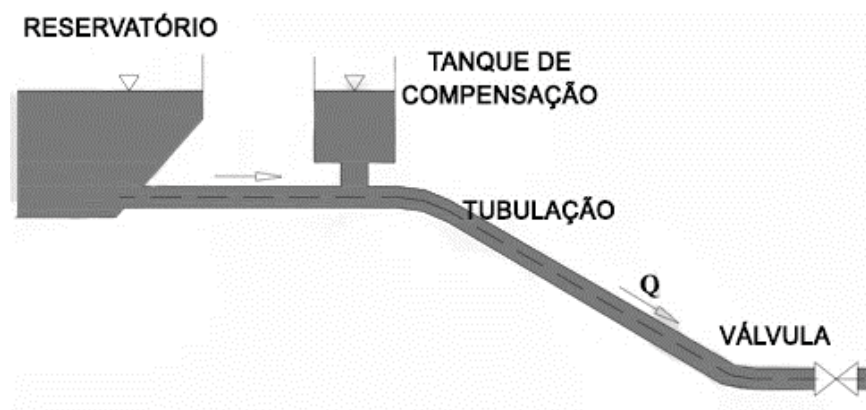


FONTE: Elaboração própria.

4.2 CENARIO II: COM CHAMINÉ DE EQUILIBRIO.

Para este caso, o Sistema Hidráulico é semelhante ao anterior, porém com a adição de um tanque de compensação próximo a saída do reservatório, como observado no diagrama da FIGURA 27. Para o cenário estudado foram considerados os seguintes parâmetros da chaminé $A_r=16,96 \text{ [m}^2\text{]}$ e $H_{S\text{max}}=40 \text{ [m]}$. Para estudar o comportamento do modelo com diferentes áreas transversais foram simuladas diferentes configurações. A posição do tanque foi mantida constante numa distância próxima ao reservatório. ($L/10=6.6\text{m}$).

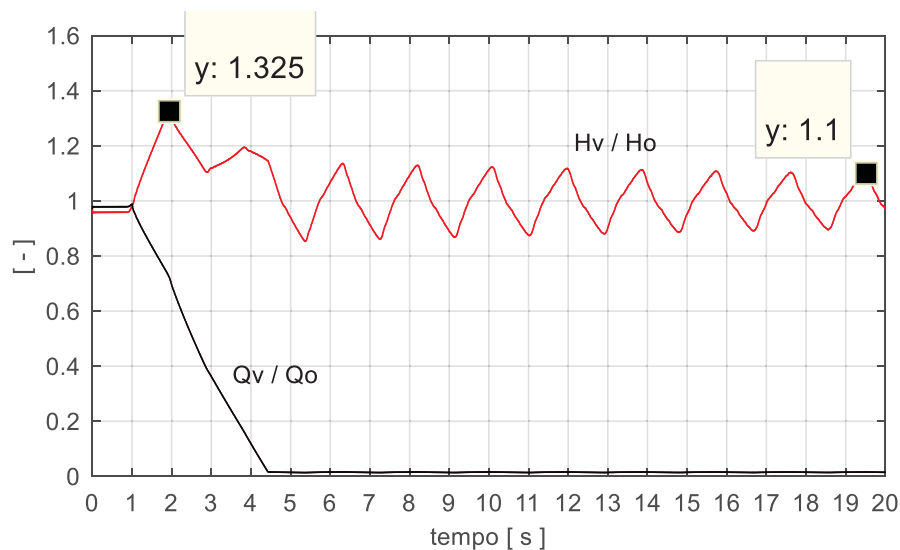
FIGURA 27:.. Diagrama do cenário II.



FONTE: Adaptado de (ILIEV; POPOVSKI; MARKOV, 2012).

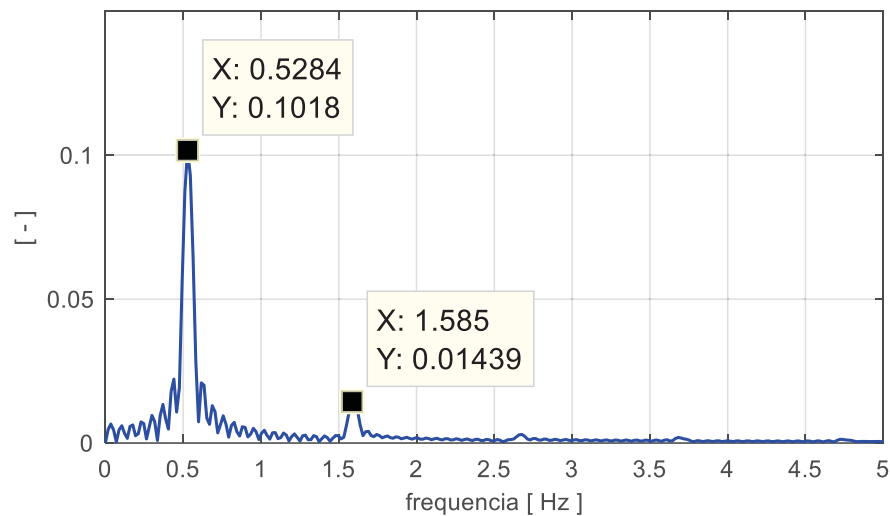
Os resultados para este cenário, são apresentados na FIGURA 28, que contempla o comportamento dinâmico do sistema hidráulico utilizando a mesma lei de fechamento, onde também é possível observar um comportamento periódico, de $T=2,17s$, entre tanto e uma pressão máxima de $H_{max}=1,325H_0$, percebe-se um formato mais amortecido, e as frequências principais podem ser observadas na FIGURA 29

FIGURA 28:.. Cenário II. Com área de chaminé $16,96m^2$ vezes a areado tubo



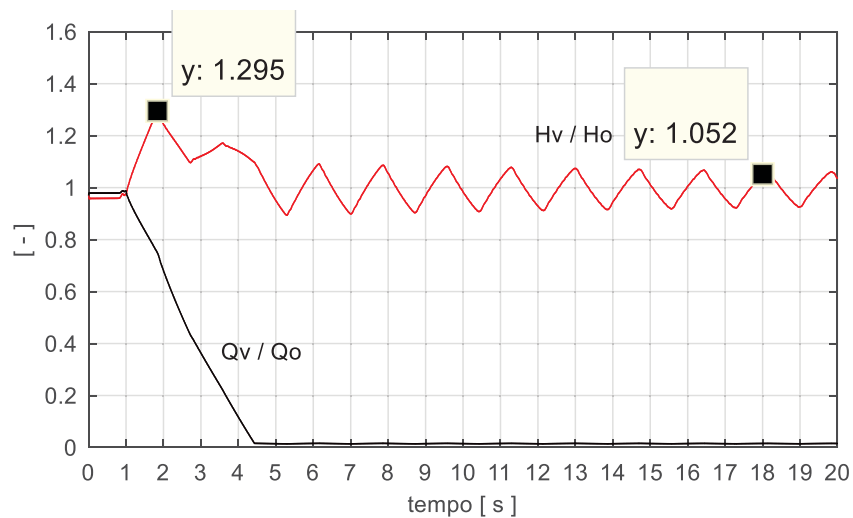
FONTE: Elaboração própria.

Para esse caso por meio de uma decomposição da oscilação no domínio da frequência foi possível determinar as duas frequências naturais principais em 0,5284Hz e 1,585Hz.

FIGURA 29:.. Frequências naturais para o caso de Chaminé com 19.96 m²

FONTE: Elaboração própria.

A seguir foi obtida a resposta do modelo para uma chaminé com maior seção transversal, 1696 m².

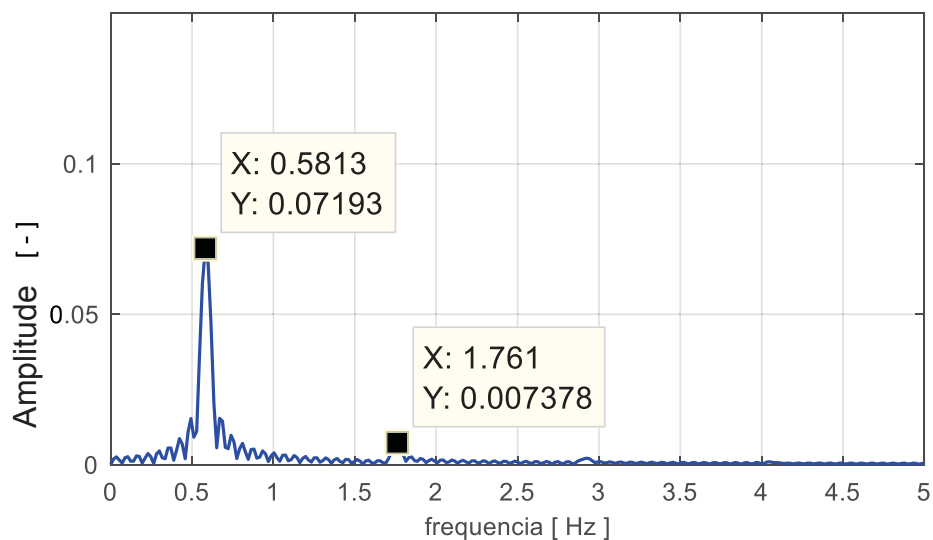
FIGURA 30: Cenário II. Com área de chaminé 1696m²

FONTE: Elaboração própria.

Para esta chaminé se observou uma redução no pico de pressão máxima de 132,5% para 129,5% da pressão inicial, também se observa como esperado uma diminuição na amplitude de oscilação. (CHAUDHRY, 2014). A amplitude amortece mais rapidamente até 1.052. Em quanto às frequências principais, a análise da transformada de Fourier arrojou um aumento nas frequências principais para

0,5813Hz e 1,761Hz, respectivamente como observado na FIGURA 31. Nesse resultado também foi possível confirmar o fato da redução da amplitude de oscilação quando comparada com a chaminé de equilíbrio menor da FIGURA 29. Porém é necessário um importante aumento da capacidade da chaminé, para observar uma redução importante na amplitude de oscilação das ondas de pressão. Isto pode ser devido as limitações do modelo, pelas considerações feitas nas equações governantes. Assim como também pode indicar uma maior incidência da posição da chaminé, antes que a capacidade. Na seguinte seção se avaliara a mesma chaminé em diferentes posições do sistema.

FIGURA 31: Frequências principais do Cenário II.



FONTE: Elaboração própria.

4.3 CENÁRIO III. CHAMINE DE EQUILIBRIO, VARIANDO POSIÇÃO.

Para este caso, foram consideradas as mesmas condições da chaminé de equilíbrio adotadas por Iliev et al. (2012).

TABELA 12: Parâmetros correspondentes ao cenário III

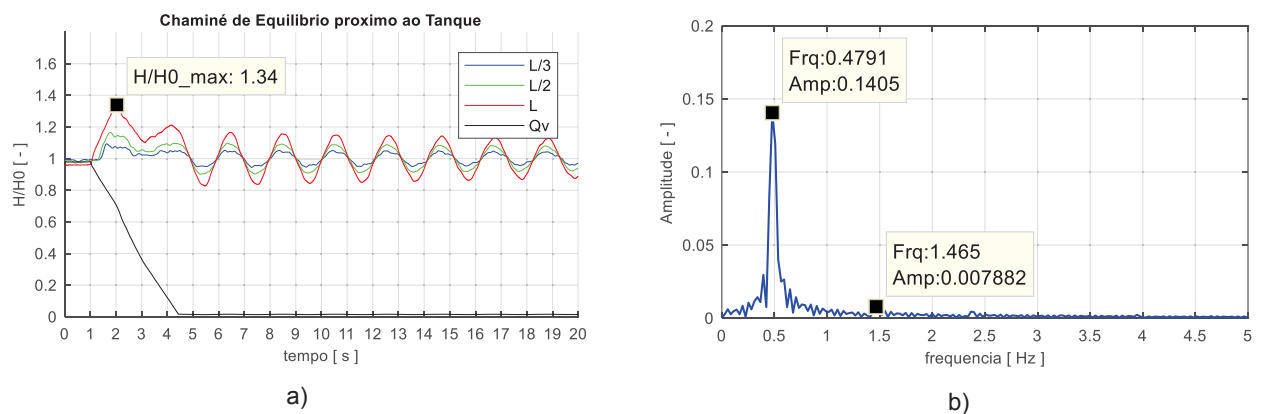
Reservatório	H_0 [m]	150
Sistema Hidráulico λ	L [m]	660
	λ [-]	0,03
	D [m]	0,6
Válvula	D_v [m]	0.6
	$(C_Q)_0$ [-]	0,0465

	Q_0 [m ³ /s]	0,47
	t_s [s]	1
	t_c [s]	3,5
Chaminé	A_S [m ²]	19,6
	A_T [m ²]	8,8
	H_{Smax} [m]	40

FONTE: (ILIEV; IVLJANIN, 2015)

Foram simulados os casos, de posições relativas à longitude da tubulação, 0, L/5, 2L/5, 3L/5 e 4L/5 respectivamente. Os resultados são apresentados são gráficos de oscilações de pressão em diferentes pontos do sistema. Próximo ao reservatório (L/3), na metade (L/2) e na válvula (L).

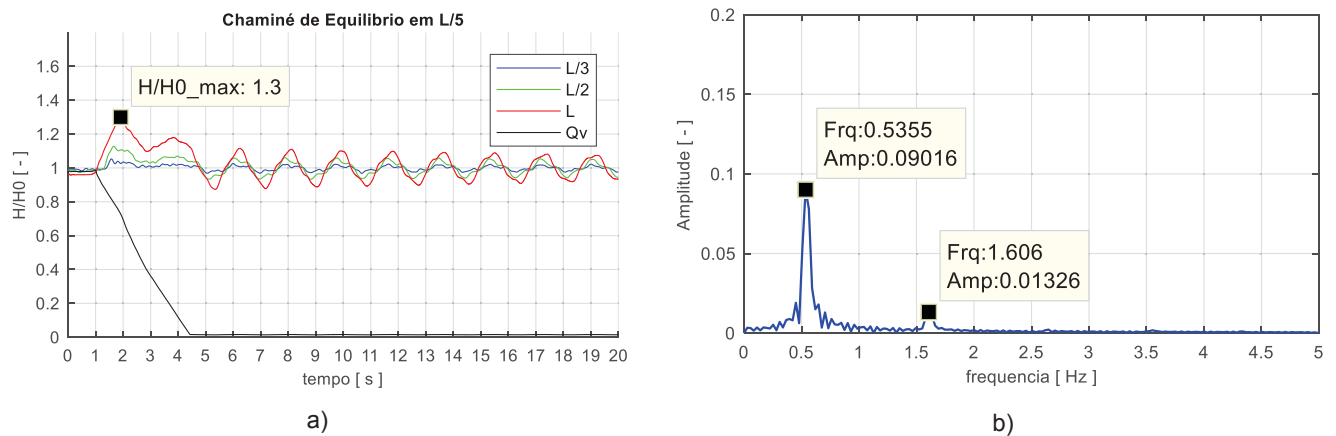
FIGURA 32. Oscilação de pressão e frequências próximo ao tanque L=0



FONTE: Elaboração própria.

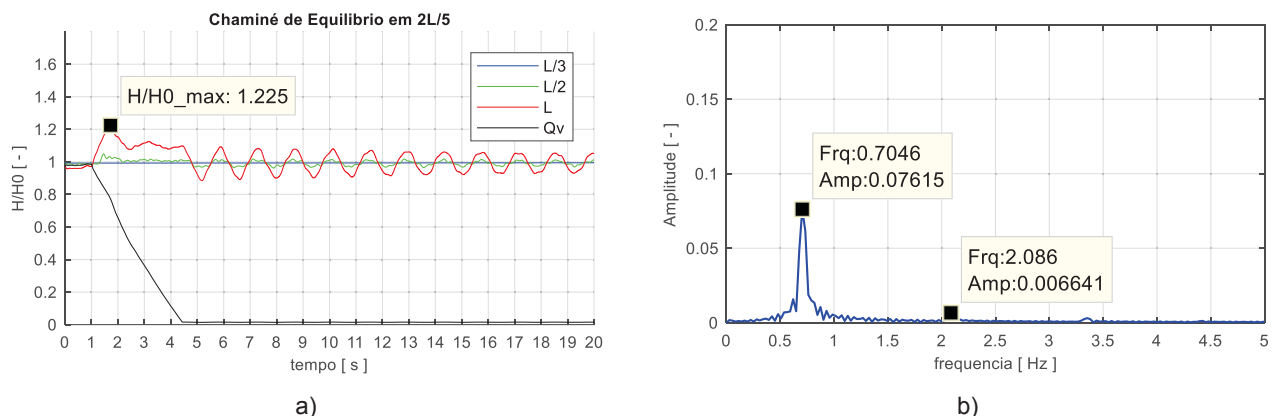
Para o caso da chaminé de equilíbrio instalada próxima ao reservatório da FIGURA 32, se observa uma redução da pressão máxima somente de 3.9% quando comparada ao cenário I. Como esperado, se observa uma maior amplitude de oscilação na válvula, e esta oscilação diminui a medida que o ponto se aproxima ao reservatório. Se observa um leve amortecimento, da onda e a frequência principal aumentou com respeito ao cenário I, para aproximadamente 0,48Hz. A segunda frequência também aumentou para 1,46Hz, porém a amplitude diminuiu.

FIGURA 33: Oscilação de pressão e Frequências próximo ao tanque L/5



FONTE: Elaboração própria.

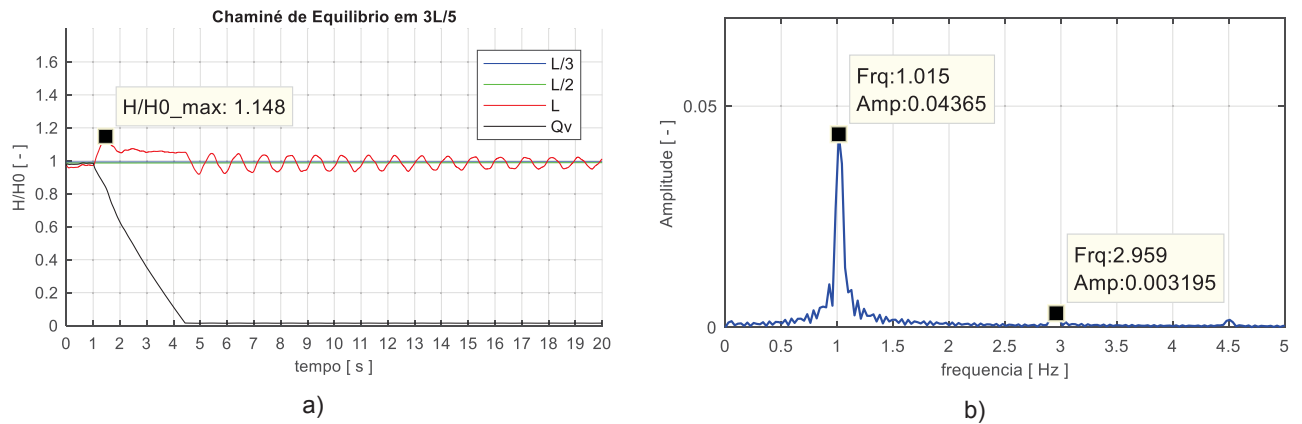
Continuando com a análise, se posicionou a chaminé a uma distância de $L/5$, isto equivale a 133,2 m de distância do reservatório. Como pode ser observada na FIGURA 33, nessa posição a pressão máxima diminui para 130% de pressão inicial antes do fechamento H_0 e comparando com o cenário sem chaminé se reduz para 7,9%. As frequências de oscilação continuam aumentando, e a amplitude diminui, porém se observa um incremento na amplitude da segunda frequência natural do sistema.

FIGURA 34: Oscilação de pressão e Frequências próximo ao tanque $2L/5$ 

FONTE: Elaboração própria.

Posicionando a chaminé a uma distância de $2L/5$, isto é, a 264m do reservatório. Se observa o mesmo comportamento, redução do pico de pressão máxima para 122,5%, aumento nas frequências principais do sistema, e se começa a observar a aparição de uma terceira frequência próxima a 3,4Hz.

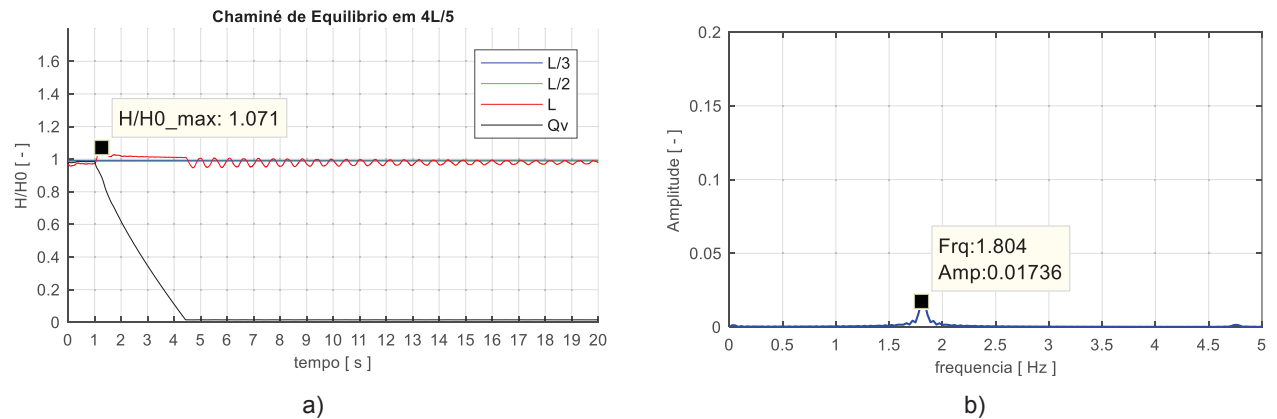
FIGURA 35: Oscilação de pressão e Frequências próximo ao tanque 3L/5



FONTE: Elaboração própria. .

Analizando a FIGURA 35, para o caso de uma chaminé instalada a 369m do tanque, isto é, a 264m da válvula, já pode ser observar uma importante redução no pico de pressão máxima, uma considerável diminuição nas amplitudes de oscilação e a presença mais acentuada de uma terceira frequência natural de oscilação em 4,5Hz.

FIGURA 36: Oscilação de pressão e Frequências próximo ao tanque 4L/5



FONTE: Elaboração própria.

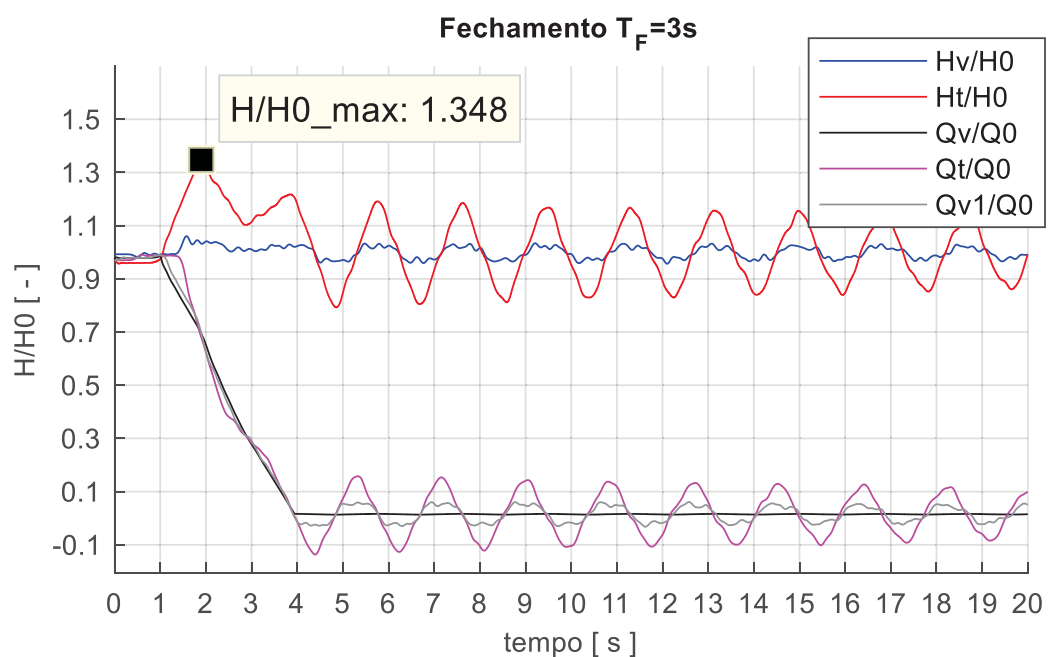
Finalmente no posicionando a chaminé, a uma proximidade de 132m da válvula, se observa que o pico de pressão máxima diminuiu para 7,1% da pressão antes do fechamento da válvula, as ondas de pressão se estabilizaram a uma amplitude baixa de menos de 2%, e se observa somente uma frequência natural.

4.4 CENÁRIO IV: COM CHAMINÉ DE EQUILIBRO, VARIANDO O TEMPO DE FECHAMENTO.

Finalmente seguindo com a análise do modelo se avalia a resposta em pressão e vazão para a variação no tempo de fechamento da válvula. A seguir os resultados obtidos. Foi posicionada a chaminé em $L/5$, e foram avaliados 3 tempos de fechamentos, em 3, 2 e 1,5s. respectivamente.

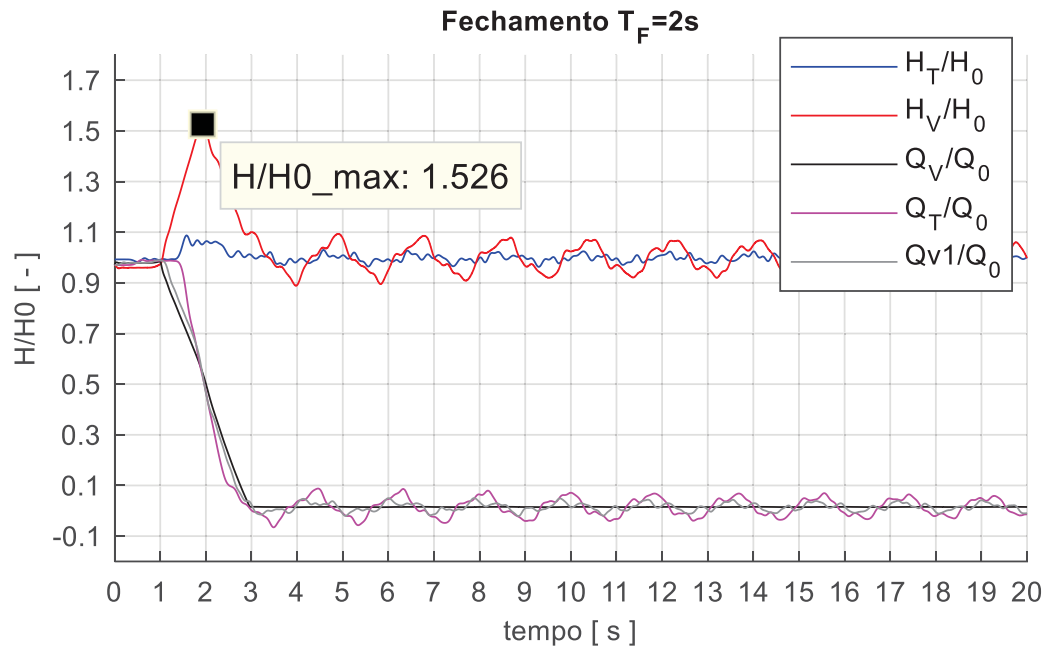
Foram escolhidas cinco posições para avaliar o comportamento durante o fenômeno transiente de fechamento da válvula. Na válvula H_v e Q_v , no tanque H_t e Q_t e num ponto próximo a válvula em Q_{v1} . Figuras FIGURA 37-FIGURA 39).

FIGURA 37. Cenário IV. Fechamento da Válvula em 3s



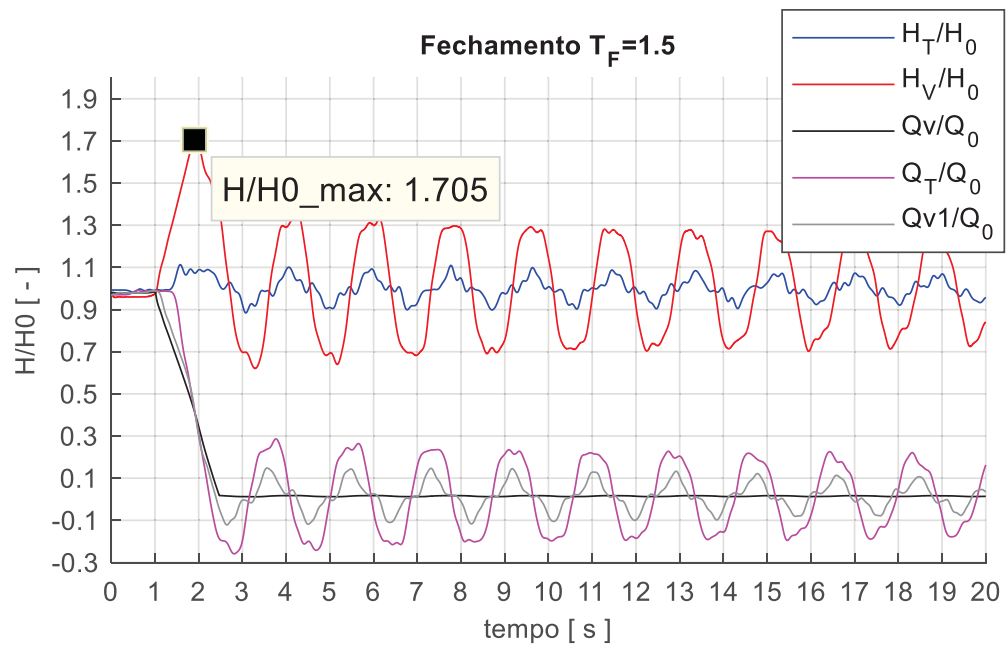
FONTE: Elaboração própria.

FIGURA 38. Cenário IV. Fechamento da Válvula em 2s



FONTE: Elaboração própria. .

FIGURA 39:. Cenário IV. Fechamento da Válvula em .1.5s



FONTE: Elaboração própria.

Se observa que o modelo responde como esperado, a medida que se diminui o tempo de fechamento da válvula, o pico de pressão máxima aumenta e assim também aumenta a amplitude de oscilação (KODURA, 2016). A vazão também apresenta uma oscilação entre valores positivos e negativos pelas ondas de pressão que viajam em ambas direções uma vez que a válvula é fechada. Pode ser observado um leve fator de amortecimento nas oscilações porem tem um comportamento estável.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como era esperado, existe uma diferença no comportamento fluidodinâmico com e sem a presença da chaminé de equilíbrio. A chaminé de equilíbrio proporcionou valores menores na pressão máxima, na diferença de pressão pico a pico e alterou o tempo de propagação, o parâmetro que maior influência teve na variação da amplitude de oscilação no modelo foi a posição da chaminé, quanto mais longe do tanque, maior o efeito de amortecimento. Os resultados da presença da chaminé de equilíbrio foram de encontro com a literatura. A condição de contorno aplicada a válvula (lei de fechamento) pode ser resolvida via método de Runge Kutta implícito, aumentando a precisão dos resultados, entretanto uma solução via método Runge Kutta explícito se demonstrou promissor para avaliação da chaminé de equilíbrio. Ambos métodos explícito, e implícito apresentaram resultados semelhantes, porem se optou pelo método implícito por sua maior estabilidade. A simulação numérica se mostrou válida para todos os cenários analisados, respondendo com resultados coerentes, a maior seção de área de chaminé e maior distância ao tanque maior o amortecimento da oscilação de pressão (diminuição da amplitude e aumento da frequência). Quanto menor o tempo de fechamento da válvula, maior o pico de pressão máxima observada, isto para diferentes pontos dos sistemas avaliados.

5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para os próximos trabalhos se recomenda adicionar mais elementos no sistema, e testar outros modelos numéricos de resolução como o método de volumes finitos, método de elementos finitos ou método de diferenças finitas, porque estes solucionam diretamente as não linearidades do sistema de equações diferenciais governantes do modelo. Assim como realizar um estudo comparativo com um modelo experimental.

6. ANEXOS

Código Matlab

```
%h GOLPE DE ARIETE PELO MÉTODO DOS SISTEMAS ANALOGOS EQUIVALENTES - (MRK)
% MÉTODO DE SOLUÇÃO: MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA DE RUNGE-KUTTA IMPLICITO
% 3ra ORDEM

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc;           % LIMPA TELA
clear;         % LIMPA MEMORIA
format short

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% BLOCO 1: PARAMETROS DO MODELO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-CONDIÇÕES DE CONTORNO:
% HO -
% QO -
HU = 220;
HD = 70;
HO = HU - HD;
QO = 0.47;

%-PARAMETROS GEOMETRICOS:
% L_PIPE -
% D_PIPE -
% A_PIPE -
L_PIPE = 660;
D_PIPE = 0.6;
A_PIPE = pi*(D_PIPE^2)/4;
A_SURGE = 1000*pi*(D_PIPE^2)/4;
%-CONSTANTES FISICAS:
% A -
% F -
% G -
A = 1219;
F = 0.03;
G = 9.81;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% BLOCO 2: PARAMETROS DA SIMULAÇÃO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% N -
% CR -
% T_SIMUL -
% DT -
% T -
```

```

% N_T -
% T_START -
% T_CLOSURE -
N = 10;
CR = 0.01;
T_SIMUL = 20;
T_START = 1;
T_CLOSURE = 3.5;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% BLOCO 3: CONSTANTE DE SIMULAÇÃO
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% N_MAIOR -
% DX -
% DT - h
% VET_T -
% N_T -
N_MAIOR = 2*N+1;
DX = L_PIPE/N;
DT = CR*(DX/A);
VET_T = (0:DT:T_SIMUL);
N_T = length(VET_T);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% BLOCO 4: MALHA COMPUTACIONAL
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
MLH = zeros(1,N);
MLH_ELEM = zeros(1,N);

MLH(1) = DX/2;
MLH_ELEM(1) = 0.5*DX;
for l = 2:N
    MLH(l) = (l - 0.5)*DX;
    MLH_ELEM(l) = (MLH(l) - MLH(l-1));
end
MLH(N+1) = N*DX;
MLH_ELEM(N+1) = 0.5*DX;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% BLOCO 3: CONSTANTES MODELO MATEMATICO (MVF)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% C -
% L -
% R -
% R_SQ -

%Definicao da posicao da Chamine de Equilibrio

```

```

C = G*A_PIPE*MLH_ELEM./(A^2);
C(5)=A_SURGE;
% START_ST=round(0.99*L_PIPE);
% D_ST=(A_SURGE*4/pi)^0.5;
% FINISH_ST=round(D_ST/DX)+START_ST;
% C(START_ST:FINISH_ST)=A_SURGE;

%C(6) = G*(A_PIPE+A_SURGE)*MLH_ELEM(6)/(A^2);
L = MLH_ELEM./(G*A_PIPE);
R = (F*MLH_ELEM.*abs(QO))/(2*G*D_PIPE*(A_PIPE)^2);
R_SQ = F*MLH_ELEM./(2*G*D_PIPE*(A_PIPE)^2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% BLOCO 4: INICIALIZAÇÃO DE VETORES
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% MAT_A -
% MAT_X -
% VET_H -
% VET_Q -
% VET_C -
% VET_Y -
% VET_YO -
MAT_A = zeros(N_MAIOR);
MAT_B = zeros(N_MAIOR);
MAT_M = zeros(N,N_MAIOR);
MAT_X = zeros(N_T,N_MAIOR);
VET_C = zeros(N_MAIOR,1);
VET_Y = zeros(1,N_T);
VET_YO = zeros(1,N_T);
VET_V = zeros(1,N_MAIOR);

VET_RVSQ=zeros(1,N_T);
VET_XX=zeros(1,N_T);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% BLOCO 5: CONDIÇÃO DE CONTORNO JUSANTE P/ VAZAO (VALVULA)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% A) LEI DE FECHAMENTO PROPOSTA POR NICOLET:

for I = 1:N_T
    if (VET_T(I)<= T_START)
        VET_Y(I) = 1;
    elseif (VET_T(I)> T_START) && (VET_T(I) < (T_CLOSURE*(0.98) + T_START)) % TESTES
        VET_Y(I) = (1- (((VET_T(I)-T_START)/T_CLOSURE)^(0.75))));
        NY = VET_Y(I);
    else
        VET_Y(I) = NY;
    end
end

```

end

%%
%%74

% BLOCO 6: CONDIÇÃO INICIAL: SISTEMA PERMANENTE - $[B(Q)]\{X\} = \{C\}$; $[A]=0$

%%
%%74

% NESTE BLOCO CÁLCULA AS CONDIÇÕES DO ESCOAMENTO PARA UM REGIME

% PERMANENTE REQUERIDA PELO MÉTODO RUNGE-KUTTA.

%

% RQ - PERDA DE CARGA DO SISTEMA HIDRÁULICO PELO FATOR DE ATRITO [MCA].

% HD - PRESSÃO EM METRO COLUNA D'AGUA DO RESERVATÓRIO JUSANTE [MCA].

% H1 - CONDIÇÃO DE CONTORNO MONTANTE [MCA].

% HN - CONDIÇÃO E CONTORNO JUSANTE [MCA].

$KVO = (HU - HD - \sum(R)*QO)*(2*G*(VET_Y(1)*A_PIPE)^2)/(QO^2);$

$RV_SQ = HO/(QO*VET_Y(1))^2;$

$A_REF = VET_Y*A_PIPE;$

$QV = VET_Y(1)*A_PIPE*\sqrt{2*G*(HU - \sum(R)*QO - HD)/KVO};$

%-----MATRIZES:[A],[B(Q)],{C}-----74

% MONTEGEM DAS MATRIZES COM O FATORES HIDROACÚSTICO, COMO INDUTANCIA,

% RESISTENCIA E CAPACITANCIA PARA O CÁLCULO DA CONDIÇÃO INICIAL.

% INICIA COM OS PREENCHIMENTO DOS TERMOS QUE NÃO VARIAM NA MATRIZ DE

% AMORTECIMENTO E NA SEQUENCIA COM OS VETORES HIDROACUSTICOS.

%

% PREENCHIMENTO DA MATRIZ B COM OS TERMOS "1" E "-1":

I = 1;

J = N + 1;

while (MAT_M(N,(N_MAIOR))~=1)

VET_V(1,J) = -1;

VET_V(1,J+1) = 1;

MAT_M(I,:) = VET_V(:);

J = J + 1;

I = I + 1;

VET_V = zeros(1,N_MAIOR);

end

MAT_MT = (-1)*MAT_M';

for I = 1:N

MAT_B(I,:) = MAT_M(I,:);

MAT_B(:,I) = MAT_MT(:,I);

end

% PREENCHIMENTO DA MATRIZ_B COM CONTRIBUIÇÃO DAS RESISTENCIAS: R

J = 1;

for I = (N+1):(N_MAIOR-1)

MAT_B(I,I) = R(J);

J = J + 1;

end

MAT_B(N_MAIOR,N_MAIOR) = (RV_SQ + R_SQ(N+1))*QO;


```
% PREENCHIMENTO DA MATRIZ_A RECEBENDO CONTRIBUIÇÃO DAS CAPACITÂNCIAS: C
for I = 1:N
    MAT_A(I,I) = C(I);
end
```

```
% PREENCHIMENTO DA MATRIZ_A RECEBENDO CONTRIBUIÇÃO DAS INDUTÂNCIAS: L
J = 1;
for I = (N+1):N_MAIOR
    MAT_A(I,I) = L(J);
    J = J + 1;
end
```

```
% PREENCHIMENTO DO VETOR_C COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO
VET_C(N+1,1) = HO;
VET_C(N_MAIOR,1) = -0;
VET_XO = linsolve(MAT_B,VET_C);
MAT_X(1,:) = VET_XO';
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% BLOCO 7: METODO DOS SISTEMA ANALOGOS: REGIME TRANSIENTE
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
tic
```

```
T = 0;
```

```
i = 0;
```

```
while (T<T_SIMUL)
```

```
    i = i + 1;
```

```
% MONTAGEM DAS MATRIZES COM O FATORES HIDROACÚSTICO, COMO INDUTANCIA,
% RESISTENCIA E CAPACITANCIA PARA O CÁLCULO DA INSTABILIDADE HIDRAULICA.
% INICIA COM OS PREECHIMENTO DOS TERMOS QUE NÃO VARIAM NAS MATRIZ DE
% AMORTECIMENTO E NA SEQUENCIA COM OS VETORES HIDROACUSTICOS RLC.
```

```
% PREENCHIMENTO DA MATRIZ B COM OS TERMOS "1" E "-1":
```

```
    I = 1;
```

```
    J = N + 1;
```

```
    while (MAT_M(N,(2*N+1))~=1)
```

```
        VET_V(1,J) = -1;
```

```
        VET_V(1,J+1) = 1;
```

```
        MAT_M(I,:) = VET_V(:);
```

```
        J = J + 1;
```

```
        I = I + 1;
```

```
        VET_V = zeros(1,N_MAIOR);
```

```
    end
```

```
    MAT_MT = (-1)*MAT_M';
```

```
    for I = 1:N
```

```
        MAT_B(I,:) = MAT_M(I,:);
```

```
        MAT_B(:,I) = MAT_MT(:,I);
```

```
    end
```

```
% PREENCHIMENTO DA MATRIZ_A RECEBENDO CONTRIBUIÇÃO DAS CAPACITÂNCIAS: C
for I = 1:N
    MAT_A(I,I) = C(I);
```

```

end

% PREENCHIMENTO DA MATRIZ_A RECEBENDO CONTRIBUIÇÃO DAS INDUTANCIAS: L
J = 1;
for I = N+1:N_MAIOR
    MAT_A(I,I) = L(J);
    J = J+1;
end

% PREENCHIMENTO DA MATRIZ_B COM CONTRIBUIÇÃO DAS RESISTENCIAS: R
J = 1;
for I = (N+1):(N_MAIOR-1)
    MAT_B(I,I) = R_SQ(J)*VET_XO(I);
    J = J + 1;
end
MAT_B(N_MAIOR,N_MAIOR) = (RV_SQ + R_SQ(N+1))*VET_XO(N_MAIOR);

MAT_AB = (-1)*linsolve(MAT_A,MAT_B);
VET_AC = linsolve(MAT_A,VET_C);

%-----RUNGE-KUTTA 4ª ORDEM-----74
K11 = 1/4;
K12 = -1/4;
K21 = 1/4;
K22 = 5/12;
VET_K1 = VET_AC + MAT_AB*(VET_XO);
VET_K2 = VET_AC + MAT_AB*(VET_XO);
ERR = 1;

while (ERR>10^-8)
    VET_K1 = VET_AC + MAT_AB*(VET_XO + DT*K11*VET_K1 + DT*K12*VET_K2);
    VET_K2 = VET_AC + MAT_AB*(VET_XO + DT*K21*VET_K1 + DT*K22*VET_K2);

    VET_KK = [VET_K1; VET_K2];

    VET_F1 = VET_K1 - (VET_AC + MAT_AB*(VET_XO + DT*K11*VET_K1 + DT*K12*VET_K2));
    VET_F2 = VET_K2 - (VET_AC + MAT_AB*(VET_XO + DT*K21*VET_K1 + DT*K22*VET_K2));

    VET_FF = [VET_F1; VET_F2];
    MAT_I = eye(N_MAIOR);

    MAT_JACOBI = [(MAT_I - K11*MAT_AB) -K12*MAT_AB;
                  -K21*MAT_AB (MAT_I - K22*MAT_AB)];
    MAT_INVJACOBI = (inv(MAT_JACOBI));

    VET_KK1 = VET_KK - MAT_INVJACOBI*VET_FF;
    ERR = max(abs(VET_KK1 - VET_KK));

    VET_K1 = VET_KK1(1:N_MAIOR);
    VET_K2 = VET_KK1(N_MAIOR+1:2*N_MAIOR);
end

VET_X = VET_XO + DT*((1/4)*VET_K1 + (3/4)*VET_K2);

```

```

RV_SQ = HO/(QO*VET_Y(i))^2;
VET_RVSQ(i) = RV_SQ;
VET_XX(i) = VET_XO(N_MAIOR)*RV_SQ;
MAT_X(i,:) = VET_XO';
VET_XO = VET_X;
T=T+DT

end
toc
TEMPO_PROCESSAMENTO = toc;
MAT_XT(:,1) = MAT_X(:,1);
MAT_XT(:,2) = MAT_X(:,N);
MAT_XT(:,3) = MAT_X(:,20);
MAT_XT(:,4) = MAT_X(:,N_MAIOR);
MAT_XT(:,5)= MAT_X(:,2); %No surge tank
MAT_XT(:,6)= MAT_X(:,3); %Apos surge tank
%clear MAT_X
%save MRK_N100_CR001_T12_F0

figure(1)
plot(VET_T,MAT_X(:,1)/HO,'color',[1 0 0])
hold on
plot(VET_T,MAT_X(:,3)/HO,'color',[0 0 1])%ST
plot(VET_T,MAT_X(:,6)/HO,'color',[1 0 0])
plot(VET_T,MAT_X(:,N)/HO,'color',[0 0 0])
grid on
plot(VET_T,MAT_X(:,11)/QO,'color',[1 0 1])%vazao
plot(VET_T,MAT_X(:,20)/QO,'color',[1 1 0])%vazao

axis([0 20 0 1.6])
set(gca,'Units','centimeters','Position',[3 4 9 5],...
'FontUnits','points',...
'YTick',-0.2:0.2:2.2,...
'XTick',0:1:20,...
'FontWeight','normal',...
'FontSize',6,...
'FontName','Arial')
ylabel('{[ - ]}',...
'FontUnits','points',...
'FontWeight','light',...
'FontSize',8,...
'FontName','Arial');
xlabel('{tempo [ s ]}',...
'FontUnits','points',...
'FontWeight','light',...
'FontSize',8,...
'FontName','Arial');
%text(0.3,2.05,2,'b) MRK','FontSize',8,'Color','k')
%text(10.5,2.05,2,'Hv / Ho','FontSize',8,'Color','k')
%text(10.5,1.90,2,'Qb / Qo','FontSize',8,'Color','k')
%text(10.5,1.75,2,'Qv / Qo','FontSize',8,'Color','k')
% plot3(10.4,2.03,1,'marker','x','MarkerFaceColor',[1 0 0],'MarkerEdgeColor',[1 0 0],'MarkerSize',2)

```

```

% plot3(10.4,1.87,1,'marker','x','MarkerFaceColor',[0.7 0 0.1],'MarkerEdgeColor',[0.7 0.0
0.1],'MarkerSize',2)
% plot3(10.4,1.74,1,'marker','x','MarkerFaceColor',[0.1 0 0],'MarkerEdgeColor',[0.1 0
0],'MarkerSize',2)
hold off

% B) FFT:

T_INIC = 1;
T_FECH = 3.5;
T_REST = T_SIMUL - T_INIC - T_FECH;

INI_N = round((T_INIC+T_FECH)/DT);
FIN_N = round((T_SIMUL)/DT);
VET_X_FFT = MAT_XT(INI_N:FIN_N,2);
FS = 1/DT;
L = length(VET_X_FFT);
VET_X_FFT = VET_X_FFT - mean(VET_X_FFT);
FG = 20;
NFFT = 2*2^nextpow2(L);
VET_XF = abs(fft(VET_X_FFT,NFFT)/(L));
VET_XF(2:NFFT/2-1) = 2*VET_XF(2:NFFT/2-1);
NG = round(FG/FS*NFFT);
VET_F = (0:NG)*FS/NFFT;

figure(2)
plot(VET_F,VET_XF(1:NG+1)/HO,'b','LineWidth',1)
axis([0 5 0 0.2])
grid on
set(gca,'Units','centimeters','Position',[3 4 9 5],...
'FontUnits','points',...
'YTick',0:0.05:1,...
'XTick',0:0.5:5,...
'FontWeight','normal',...
'FontSize',6,...
'FontName','Arial')
ylabel('{[ - ]}','...
'FontUnits','points',...
'FontWeight','light',...
'FontSize',8,...
'FontName','Arial');
xlabel('{frequencia [ Hz ]}','...
'FontUnits','points',...
'FontWeight','light',...
'FontSize',8,...
'FontName','Arial');

% COMPARACAO: LEI DE VAZAO E LEI DE FECHAMENTO
A_REF = (A_PIPE*(VET_Y));
CQO = QO/(A_REF(1)*sqrt(2*G*HO));
CQ = CQO*(VET_Y);
VET_QV1 = CQ.*A_REF*sqrt(2*G*HO);
COEF_QV = [-0.0801787452200337 0.432684496165189 -0.745755477839363 ...

```

```

0.365840593928554 0.0602320617606929 -0.447702635113965 ...
1.00180274317981];
N_CLOSURE = round(T_CLOSURE/DT);
N_START = round(T_START/DT);
VET_QVO1(1:N_START) = QO;
VET_QVO2 = polyval(COEF_QV,VET_T(1:N_CLOSURE))*QO;
VET_QVO3(1:N_T-N_START-N_CLOSURE) = VET_QVO2(end)*QO;
VET_QV = [VET_QVO1 VET_QVO2 VET_QVO3];

figure(3)
PLOT_VET_MATX_Q = plot(VET_T,MAT_XT(:,4)/QO,'-
*', 'MarkerIndices',50000:240000/6:length(VET_T),'color',[0.25 0.75 1]);
hold on
grid on
PLOT_VET_QV = plot(VET_T,VET_QV/QO,'LineWidth',1,'color',[0.25 0.85 0.25]);
axis([0 4 0 1.2001])
set(gca,'Units','centimeters','Position',[3 4 5 5],...
'FontUnits','points',...
'YTick',0:0.2:4,...
'XTick',0:1:12,...
'FontWeight','normal',...
'FontSize',6,...
'FontName','Arial')
ylabel('{Qv [m^3/s]}',...
'FontUnits','points',...
'FontWeight','light',...
'FontSize',8,...
'FontName','Arial');
xlabel('{tempo [ s ]}',...
'FontUnits','points',...
'FontWeight','light',...
'FontSize',8,...
'FontName','Arial');
text(0.3,1.125,2,'d) MRK','FontSize',8,'Color','k')
text(2,1.135,2,'Lei de Fechamento','FontSize',8,'Color','k')
text(2,1.06,2,'Lei de Vazão','FontSize',8,'Color','k')
plot3(1.9,1.124,1,'marker','x','MarkerFaceColor',[0.25 0.75 1],'MarkerEdgeColor',[0.25 0.75
1],'MarkerSize',2)
plot3(1.9,1.05,1,'marker','x','MarkerFaceColor',[0.25 0.85 0.25],'MarkerEdgeColor',[0.25 0.85
0.25],'MarkerSize',2)
hold off

% COMPARACAO DA ACELERAÇÃO: LEI DE VAZAO E LEI DE FECHAMENTO
for i= 1:N_T-1
    VET_ACEL_QV(i) = abs(VET_QV(i+1)-VET_QV(i))/DT;
    VET_ACEL_YV(i) = abs(MAT_XT(i+1,4)-MAT_XT(i,4))/DT;
end
figure(4)
plot(VET_T(1:N_T-1),VET_ACEL_QV(1:N_T-1),'color',[0.25 0.85 0.25])
hold on
grid on
plot(VET_T(1:N_T-1),VET_ACEL_YV(1:N_T-1),'color',[0.25 0.75 1])
axis([0.5 3.5 0 1.000])

```

```

set(gca,'Units','centimeters','Position',[3 4 5 5],...
    'FontUnits','points',...
    'YTick',-0.05:0.15:4,...
    'XTick',0:0.5:12,...
    'FontWeight','normal',...
    'FontSize',6,...
    'FontName','Arial')
ylabel('{d(Qv) /dt [m^3/s^2]}',...
    'FontUnits','points',...
    'FontWeight','light',...
    'FontSize',8,...
    'FontName','Arial');
xlabel('{tempo [ s ]}',...
    'FontUnits','points',...
    'FontWeight','light',...
    'FontSize',8,...
    'FontName','Arial');
text(0.65,0.925,2,'e) MRK','FontSize',8,'Color','k')
text(1.98,0.935,2,'Lei de Fechamento','FontSize',8,'Color','k')
text(1.98,0.876,2,'Lei de Vazão','FontSize',8,'Color','k')
plot3(1.92,0.935,1,'marker','x','MarkerFaceColor',[0.25 0.75 1],'MarkerEdgeColor',[0.25 0.75
1],'MarkerSize',2)
plot3(1.92,0.875,1,'marker','x','MarkerFaceColor',[0.25 0.85 0.25],'MarkerEdgeColor',[0.25 0.85
0.25],'MarkerSize',2)
text(1.2,0.4,2,'1ª fase','FontSize',8,'Color','k')
text(2.25,0.40,2,'2ª fase','FontSize',8,'Color','k')
hold off

```

6. REFERÊNCIAS

- BOJANA ROSIĆ. **Advanced methods for ODEs and DAEs**, Technische Universität Braunschweig, 19 abr. 2017.
- BUTCHER, J. C. **Numerical methods for ordinary differential equations**. [s.l.] John Wiley & Sons, 2016.
- CANUTO, C.; TABACCO, A. Taylor expansions and applications. In: **Mathematical Analysis I**. [s.l.] Springer, 2015. p. 225–257.
- CHAUDHRY, M. H. Applied hydraulic transients. 2014.
- COLEBROOK, C. F.; WHITE, C. M. Experiments with fluid friction in roughened pipes. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 161, n. 906, p. 367–381, 1937.
- DOERFLER, P. **Evaluating 1D models for vortex-induced pulsation in Francis turbines**. 14 out. 2009
- EPE. **Balanco energético nacional**. [s.l.] Ministerio de Minas e Energia, 2017. Disponível em: <https://ben.epe.gov.br/downloads/Relatorio_Final_BEN_2017.pdf>.
- FOX, R. W. et al. **Fox and McDonald's introduction to fluid mechanics**. [s.l.: s.n.].
- HAALAND, S. E. Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. **Journal of Fluids Engineering**, v. 105, n. 1, p. 89–90, 1983.
- HAIRER, E.; WANNER, G. Radau Methods. In: ENGQUIST, B. (Ed.). **Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015. p. 1213–1216.
- HASLER, J. P. Investigating Russia's biggest dam explosion: What went wrong. **Popular Mechanics**, v. 2, 2010.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. [s.l.] Pearson Educación, 2010.
- ILIEV, V.; IVLJANIN, B. Sensitivity of Transient Phenomena Analysis of the Francis Turbine Power Plants. **International Journal of Engineering Research and Applications**, v. 5, n. 8, p. 265–273, 2015.
- ILIEV, V.; POPOVSKI, P.; MARKOV, Z. Transient phenomena analysis in hydroelectric power plants at off-design operating conditions. **International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA)**, v. 2, 2012.
- JOVIC, V. **Analysis and modelling of non-steady flow in pipe and channel networks**. [s.l.] John Wiley & Sons, 2013.
- KODURA, A. An Analysis of the Impact of Valve Closure Time on the Course of Water Hammer. **Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics**, v. 63, 2016.

LAI, J.-S.; LIN, G.-F.; GUO, W.-D. Simulation of hydraulic shock waves by hybrid flux-splitting schemes in finite volume method. **Journal of Mechanics**, v. 21, n. 2, p. 85–101, 2005.

MARRA, J. **Predição do comportamento hidráulico de turbinas Francis utilizando métodos numéricos**. 2017. 334p. Tese (Doutor em Ciências) - Pós-Graduação de Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

MOODY, L. Friction Factors for Pipe Flow. **Transaction of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 66, p. 671–684, 1944.

NICOLET, C. **HYDROACOUSTIC MODELLING AND NUMERICAL SIMULATION OF UNSTEADY OPERATION OF HYDROELECTRIC SYSTEMS**. Tese—Lausanne: ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE, 2007.

PRITCHARD, P. J.; LEYLEGIAN, J. C. **Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics**. [s.l.] Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

REYNOLDS, O. XXIX. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 174, p. 935–982, 1883.

SANDRETTO, J. A. D.; CHAPOUTOT, A. Validated explicit and implicit runge-kutta methods. **Reliable Computing electronic edition**, v. 22, 2016.

STREETER, V. L.; WYLIE, E. B. **Fluid mechanics. International student edition**. [s.l.] McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1966.

TULLIS, J. P. **Hydraulics of pipelines: pumps, valves, cavitation, transients**. [s.l.] John Wiley & Sons, 1989.

WHITE, F. M. Fluid mechanics, WCB. **Ed McGraw-Hill Boston**, 1999.